

1. はじめに

浅水方程式は静水圧分布を仮定し、流体の連続式と運動方程式を水深方向に積分して得られる。流れを2次元で解析できるため、水工学上重要な方程式となっている。浅水方程式は、一般的に陽的に離散化され解かれることが多いが、数値安定性の点では陰的な解法が優れているとされる¹⁾²⁾。また、河川などの複雑形状の領域の場合、規則的に格子を切る構造格子では扱いづらい。そこで本報では、非圧縮性流体の一般的な数値解法であるMAC法を浅水方程式に適用した手法(MACS)¹⁾²⁾を三角形非構造格子に拡張する。そして、分散メモリシステムに基づく並列化を施し、その効果を確認する。

2. 数値解析手法

(1) 浅水方程式

積分形の基礎式は、次の2式である。 M_i は x_i 方向の単位幅流量、 M は (M_1, M_2) を成分とする流量ベクトル、 u は (u_1, u_2) を成分とする断面平均流速ベクトル、 h は水深、 H は基準面から測った水位、 g は重力加速度、 ν_t は渦動粘性係数、 F_i は x_i 方向の底面摩擦項、 Ω は注目する要素の領域である。本報では、水深、流量の各成分をセル中心で定義するコロケート格子配置を利用している。

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot M d\Omega = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial M_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (M_i u) d\Omega = - \int_{\Omega} gh \frac{\partial H}{\partial x_i} d\Omega + \nu_t \int_{\Omega} \nabla^2 M_i d\Omega + \int_{\Omega} F_i d\Omega \quad (2)$$

(2) MACSの概要

MACSの計算手順は以下のa)~e)で示される。なお S_0 は要素0の面積、 $M_{b,m}$ は要素0と隣接要素 m との共有辺上での単位幅流量、 $\Omega_{b,m}$ は要素0、 m の2つの領域をあわせた領域、 $S_{m,b}$ はその面積を表す。

a) 流量の予測値 M_i^{*n} を求める。

$$M_i^{*n} = M_i^n + \frac{\Delta t}{S_0} \left[- \int_{\Omega} gh^n \frac{\partial H^n}{\partial x_i} d\Omega - \oint_{\partial\Omega} M_i^n u^n \cdot ndl + \nu_t \oint_{\partial\Omega} \nabla M_i^n \cdot ndl + \int_{\Omega} F_i d\Omega \right] \quad (3)$$

b) 空間内挿により、セル境界での流量 M_b^{*n} を求める。

c) 水位変化量 $\phi (= H^{n+1} - H^n = h^{n+1} - h^n)$ を求める。

$$\phi = - \frac{\Delta t}{S_0} \oint_{\partial\Omega} M^{n+1} \cdot ndl \quad (4)$$

ただし、

$$M_{b,m}^{n+1} = \hat{M}_{b,m}^{*n} - \frac{\Delta t}{S_{b,m}} \int_{\Omega_{b,m}} gh^n \nabla \phi d\Omega \quad (5)$$

d) 得られた ϕ を式(5)に代入し、 M^{n+1} を求める。

e) $n+1$ を n として手順a)に戻る。

3. 並列計算法の導入

式(4)、(5)の2式から M^{n+1} を消去した式は ϕ の連立一次方程式である。本報ではこれを反復解法であるSOR法を用いて解いた。そこで、SOR法の並列化について示す。

SOR法では、連立一次方程式 $A\phi = b$ を解く際に残差ベクトル $r (= b - A\phi)$ の大きさがしきい値 ϵ 以下になるまで繰り返し計算を行う。本報では水位勾配項に対し1次精度の離散化を行ったため、ある要素の計算にはその隣接要素のみが関係する。これを考慮すれば、SOR法で用いられる式は次のようになる。

$$\phi_i^{(k+1)} = \phi_i^{(k)} + \omega \left[\frac{1}{a_{i,i}} \left(- \sum_{j \in I(i), j < i} a_{i,j} \phi_j^{(k+1)} - \sum_{j \in I(i), j > i} a_{i,j} \phi_j^{(k)} \right) - \phi_i^{(k)} \right] \quad (6)$$

ここで、 $\phi^{(k)}$ はSOR法の繰り返し回数 k ステップにおける ϕ の値、 ω は加速パラメータ、 $I(i)$ は要素 i に隣接する要素番号の集合(本報では三角形非構造格子を用いているので、隣接する3要素の集合)である。この式を、 $er = r \cdot r < \epsilon$ となるまで計算する。

分散メモリシステムに基づく領域分割法を用いる場合には、自分の領域内の ϕ のみを計算すればよいが、他領域と隣接する要素では相互に ϕ を交換し合う必要がある。また残差ベクトルの計算のためにも情報通信が必要である。よって、次のような手順が必要となる。

a) 式(6)により自領域の要素の ϕ を更新する。

b) 通信によりオーバーラッピング要素の ϕ を更新する。

c) ローカルな残差ベクトルの内積 $er_{local} = r_{local} \cdot r_{local}$ を計算する。

d) er_{local} を通信し $er = \sum er_{local}$ を求める。

e) er がしきい値以下ならば計算を終了する。しきい値を越える場合は手順a)に戻る。

なお、オーバーラッピング要素とは、通信した他領域の情報を格納するため自領域の周囲につくる要素のことである。

4. 水理実験との比較

(1) 湾曲水路実験

玉井ら³⁾は湾曲水路模型実験を行い、定常時の水路横断面における水面形と主流速分布を観測している。湾曲水路は、互いに反転する中心角 $\pi/2$ の円弧が 10 個連続したもので、円弧間は直線区間で結ばれている。図 1 は水路の単位形状である。表 1 は実験条件であり、表内の水路勾配は水路中心軸に沿う値を採用している。

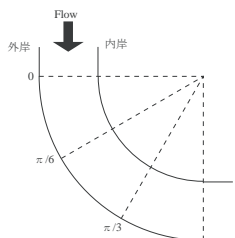


表 1 実験条件

水路幅	0.3(m)
円弧の曲率半径	内岸：0.45(m) 外岸：0.75(m)
円弧間直線距離	0.3(m)
水路勾配	1.0×10^{-3}
底面材料	モルタル
単位幅流量 q_0	$6.53 \times 10^{-3} \text{ (m}^2/\text{s)}$
平均水深 h_{ave}	0.0293(m)

図 1 水路単位形状

(2) 計算結果との比較

初期条件は、初期単位幅流量として入口横断面と垂直方向に q_0 、初期水位として h_{ave} を与えた。境界条件は、入口部分で流量一定で $q = q_0$ 、水位勾配 0 とした。出口部分では、水深は等流水深 $h_e = (n^2 q_0^2 / \sin \theta)^{0.3}$ で一定とし、流量勾配 0 とした。底面の Manning の粗度係数 n は、実験模型の底面がモルタルであることから、水路底面でのマンニングの粗度係数を 0.012 とした⁴⁾。河道側面の境界条件としては、水位勾配 0 で、ノンスリップ条件で計算を行った。また渦動粘性係数の簡便なモデルとして次式を用いた。

$$\nu_t = \alpha U_* h \quad (7)$$

ここで U_* は摩擦速度であり、 α は定数である。本報では $\alpha = 0.3$ とした⁵⁾。解析結果は、流れがほぼ定常となる $t = 100(\text{s})$ での結果を用いた。また、実験同様、各円弧区間の同位相断面毎に、内岸と外岸の関係を考慮して平均したものとした。

図 2、図 3 は円弧の位相 $\pi/6$ における横断面での水面形、主流速分布である。実験結果と概ね一致している。

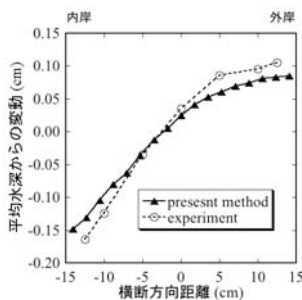


図 2 水面形

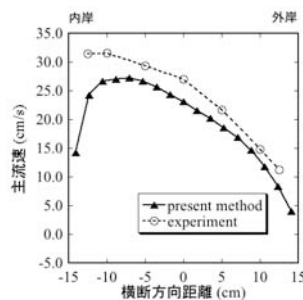


図 3 主流速分布

5. 並列化の効果

本手法の並列化の効果を知るため、湾曲水路流れを対象に並列計算を行った。図 4 は、要素数の違う 3 種類のメッシュ (Mesh S:要素数 806, Mesh M:要素数 3164, Mesh L:要素数 19338) に対し、32 並列までの計算を行ったときの計算結果である。スピードアップ SU は次式で定義される。

$$SU = \frac{1 \text{ プロセス使用時の計算実行時間}}{N \text{ プロセス使用時の実行時間}} \quad (8)$$

図 4 から、要素数の大きいメッシュであるほどスピードアップが大きいことが分かる。これは、大規模計算であるほど各プロセスが受け持つ要素数が増え、実行時間に占める計算時間の割合が通信時間に比べて支配的となるためである。

なお、計算は京都大学のスーパーコンピュータ (M9000) を用いて行った。単一プロセスでの計算 (1 並列) の場合、計算時間は 15 分程度であった。

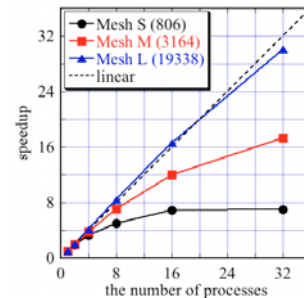


図 4 スピードアップ

6. おわりに

浅水流方程式の解法である MACS を非構造格子に拡張し、湾曲水路流れに適用した。本手法が、数値の精度と並列化効果の高い手法であることを確認した。また、湾曲水路に対する適応性が確認された。今後はより複雑な境界形状を有する流れ場への適用性を検討したい。

参考文献

- 1) 牛島省, 山下英夫, 藤岡奨, 禰津家久. コロケート格子上の非圧縮性流体計算法に基づく浅水流方程式の数値解法. 水工学論文集, Vol. 50, pp. 775-780, 2006.
- 2) 牛島省, 福谷彰, 山下英夫, 禰津家久. 非圧縮性流体計算法 (macs) を用いた浅水流方程式の数値計算. 水工学論文集, Vol. 51, pp. 811-816, 2007.
- 3) 玉井信行, 池内幸司, 山崎晶. 連続わん曲水路における流れの実験的研究. 土木学会論文報告書, 第 331 号, pp. 83-94, 1983.
- 4) 須賀堯三. 水理模型実験. 山海堂, 1990.
- 5) 国土技術研究センター. 河床変動計算システム検討資料 2 次元流れ計算直行座標計算結果.