

京都大学工学部 学生員 ○西川 晃司  
 京都大学工学研究科 正会員 五十嵐 晃

1. 概要

弾塑性挙動を示す鋼・鉄筋コンクリート構造物や部材の載荷実験を行うに当たり、接線剛性が着目されることがある。特に、多点載荷や複数の自由度を制御しながら載荷を行う実験において、実験対象の弾塑性を追跡するための特性量や、実験に用いる複数の載荷装置をより高精度で制御するための調整用情報として利用される。接線剛性を多自由度に拡張した接線剛性行列を推定する手法として最小更新法を用いる。同手法に基づきその安定性および妥当性を、単純化したバイリニア型復元力特性を持つ構造モデルを用いた数値計算例により検討した。

2. 接線剛性行列の推定法と対象モデル

2.1 最小更新法

最小更新法は、時間ステップごとに与えられる変位増分・復元力増分の関係を満たす接線剛性行列を逐次更新し、推定する手法である。ステップ  $i+1$  の接線剛性行列  $\mathbf{K}_{(i+1)}$  の推定について式(1)の形を持つ。

$$\mathbf{K}_{(i+1)} = \mathbf{K}_{(i)} + \mathbf{E}_{(i)} \quad (1)$$

式(1)において  $\mathbf{E}_{(i)}$  は各ステップで更新される部分である。 $\mathbf{E}_{(i)}$  を与える公式は種々のものがあるが、ここでは式(2)の BFGS 公式と式(3)の DFP 公式、および式(4)で表される Broyden 公式族に着目する。変位増分ベクトルを  $\delta$ 、復元力増分ベクトルを  $\gamma$  とすると、

$$\mathbf{E}_{BFGS} = \left( 1 + \frac{\delta^T \mathbf{K} \delta}{\gamma^T \delta} \right) \frac{\gamma \gamma^T}{\gamma^T \delta} - \left( \frac{\gamma \delta^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \delta \gamma^T}{\gamma^T \delta} \right) \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_{DFP} = \frac{\gamma \gamma^T}{\gamma^T \delta} - \frac{\mathbf{K} \delta \delta^T \mathbf{K}}{\delta \mathbf{K} \delta^T} \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_{Broyden} = (1 - \phi) \mathbf{E}_{DFP} + \phi \mathbf{E}_{BFGS} \quad (4)$$

BFGS 公式を用いた接線剛性行列  $\mathbf{K}_{(i+1)}$  の推定を行う更新アルゴリズムを記す。

- i) 変位増分ベクトル  $\delta_{(i)} = \mathbf{x}_{(i+1)} - \mathbf{x}_{(i)}$ 、復元力増分ベクトル  $\gamma_{(i)} = \mathbf{r}_{(i+1)} - \mathbf{r}_{(i)}$  の入手
- ii)  $\delta_{(i)}$  の絶対値最大成分の判定

$$\|\delta_{(i)}\|_{\infty} > 0 \quad (5)$$

- 式(5)を満たさなければ  $\mathbf{K}_{(i+1)} = \mathbf{K}_{(i)}$  として vi)へ
- iii) 推定される接線剛性行列が正定値行列となるデータかの判定

$$\gamma_{(i)}^T \delta_{(i)} > 0 \quad (6)$$

- 式(6)を満たさなければ  $\mathbf{K}_{(i+1)} = \mathbf{K}_{(i)}$  として vi)へ
- iv)  $\Delta \mathbf{K}_{1(i)}, \Delta \mathbf{K}_{2(i)}$  を計算

$$\Delta \mathbf{K}_{1(i)} = \left( 1 + \frac{\delta^T \mathbf{K}_{(0)} \delta}{\gamma^T \delta} \right) \frac{\gamma \gamma^T}{\gamma^T \delta} - \left( \frac{\gamma \delta^T \mathbf{K}_{(0)} + \mathbf{K}_{(0)} \delta \gamma^T}{\gamma^T \delta} \right)$$

$$\Delta \mathbf{K}_{2(i)} = \left( 1 + \frac{\delta^T \mathbf{K}_{(i)} \delta}{\gamma^T \delta} \right) \frac{\gamma \gamma^T}{\gamma^T \delta} - \left( \frac{\gamma \delta^T \mathbf{K}_{(i)} + \mathbf{K}_{(i)} \delta \gamma^T}{\gamma^T \delta} \right)$$

- v) フロベニウスノルム  $\|\Delta \mathbf{K}_{1(i)}\|_F, \|\Delta \mathbf{K}_{2(i)}\|_F$  を計算し、

$$\|\Delta \mathbf{K}_{1(i)}\|_F \leq \|\Delta \mathbf{K}_{2(i)}\|_F \text{ なら } \mathbf{K}_{(i+1)} = \mathbf{K}_{(0)} + \Delta \mathbf{K}_{1(i)}$$

$$\|\Delta \mathbf{K}_{1(i)}\|_F > \|\Delta \mathbf{K}_{2(i)}\|_F \text{ なら } \mathbf{K}_{(i+1)} = \mathbf{K}_{(i)} + \Delta \mathbf{K}_{2(i)}$$

ただし、 $\min(\|\Delta \mathbf{K}_{1(i)}\|_F, \|\Delta \mathbf{K}_{2(i)}\|_F) > \|\mathbf{K}_0\|_F$  なら

$$\mathbf{K}_{(i+1)} = \mathbf{K}_{(i)}$$

- vi)  $i \leftarrow i+1$  ステップへ

なお、推定される接線剛性行列は正定値対称となる。

2.2 解析モデル

ケーススタディとして解析に用いた構造モデルを図 1 に示す。この 3 自由度系を構築するばね要素は剛性を同一とし、それぞれバイリニア型の復元力モデルを仮定した。モデルの全固有振動数を

含む帯域ホワイトノイズを地動入力として非線形動的応答計算を行った。応答計算の各時間ステップにおいて各ばね部材の剛性を式(7)の行列に組み込み、各時間ステップの接線剛性行列の真値とした。

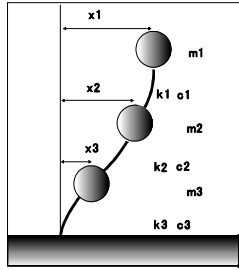


図1 対象モデル

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

### 2.3 解析ケース

推定精度に影響を与えると考えられる構造モデルの条件として、剛性比・降伏耐力・入力波の周波数帯域・降伏開始点に着目し、それぞれの値を変化させ解析した。「降伏開始点」とはバイリニアモデルの降伏変位・降伏耐力をそれぞれ  $\beta (0 \leq \beta \leq 1)$  倍した点とする。剛性変化が緩やかな緩和バイリニアモデルを想定して剛性を変化させた。

以上のモデルについて応答計算を行い、逐次の変位・復元力データを得た。両データについて実計測におけるノイズの混入を考慮し、ノイズを加えた上で入力データとした。ノイズは各データの絶対値平均に対し 0.1% および 1% の標準偏差かつ平均 0 の正規分布をもつホワイトノイズとした。

### 2.4 推定精度の評価

推定された接線剛性行列の精度を評価するに当たり一次の固有値に着目した。これは、地動入力による動的応答で卓越するのが低次側のモードであるためである。推定値と真値より相対誤差を求め、二乗平均平方根(以下 RMS 値)で評価した。

### 3. 推定値と真値の比較

ノイズのない場合における接線剛性行列の一次の固有値時刻歴推定結果を図2に示す。最小更新法との比較のため最小二乗法(以下 LSA)による推定結果も併せている。太線の真値に対し LSA では大きく変動するが、最小更新法では各公式それ

ぞれが比較的良好に追従している。

ノイズ比率ごとに最小更新法の推定精度を比較した結果を図3に示す。ノイズのない状態では DFP 公式が最も精度が高い。変位データのノイズ比率が上がるほど精度の高い公式が Broyden 公式族において BFGS 公式の重みが大きい側に移動している。

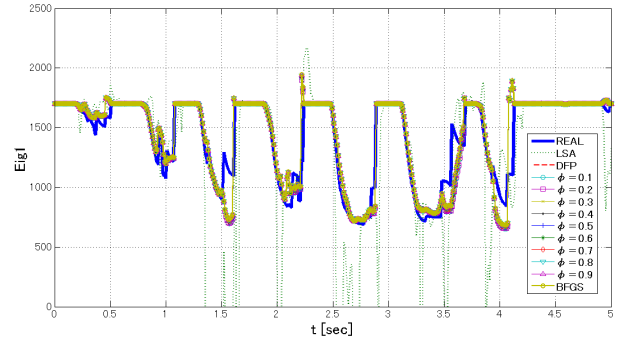


図2 一次固有値の時刻歴推定結果(ノイズなし)

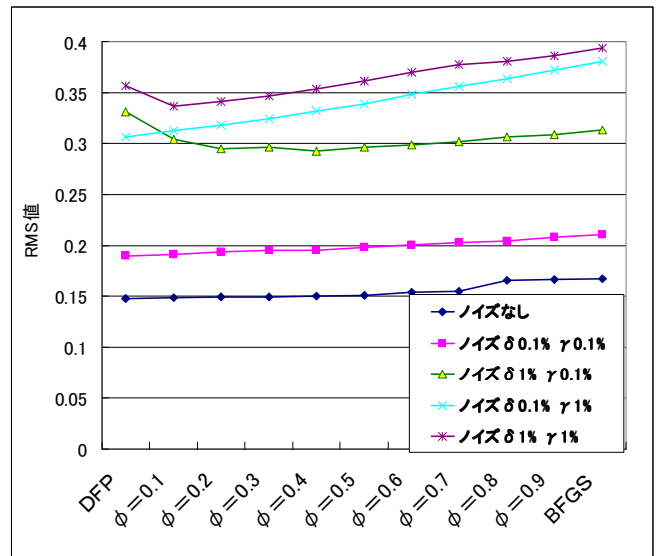


図3 ノイズ比率ごとの RMS 値比較

### 4. まとめ

- 最小更新法は接線剛性行列の低次の固有値に関して有用に推定しうる。
- ノイズのない変位・復元力データで行った推定では、DFP 公式が最も精度が高い。
- ノイズを加えると、変位データのノイズ比率が大きくなるほど DFP 公式から Broyden 公式族において BFGS 公式の重みが大きい側に精度の高い公式が遷移する。