

第Ⅱ部門

MLS を導入した PTV による渦度推定法

近畿大学理工学部

正会員 竹原 幸生

近畿大学理工学部

正会員 江藤 剛治

1. はじめに

PTV(Particle Tracking Velocimetry)によって得られる流速分布はランダム分布となる。格子点に変換された流速値から、さらに渦度等の微分値を求めると誤差が増幅されてしまう。本研究では数値計算分野で開発されたメッシュレス法の1つであるMLS(Moving Least Square)法¹⁾を用いて、PTV計測により得られたランダム点上の流速分布から格子点上に流速値を変換することなく、直接、渦度を推定する方法を提案する。

MLSは、ランダムに分布しているデータに対して多項式を当てはめることにより、任意の点におけるデータの最適推定値やその微分値を求める方法である。

2. MLSを用いたPTV計測値の直接渦度推定法の提案

MLSではランダムな位置に存在する誤差を含んだ流速や圧力等の物理量に対して、着目点回りで最小自乗法により多項式を当てはめ、着目点での物理量やその空間微係数等の最適値を求め、数値計算を行う方法である。着目点に物理量が存在しなくても計算ができる。本研究ではPTVで得られるランダム点上の流速分布にMLSを適用し、格子点上の流速分布に変換することなく直接渦度を求める。

MLSでは着目している点周辺に設定した小領域内で多項式を当てはめ、流速値等の物理量とその空間微分値を求める。本研究では、以下ような2次関数を当てはめる(図-1参照)。

$$u(x, y) = a_u x^2 + b_u xy + c_u y^2 + d_u x + e_u y + f_u \quad (1)$$

$$v(x, y) = a_v x^2 + b_v xy + c_v y^2 + d_v x + e_v y + f_v$$

ここで、 $(a_u, b_u, c_u, d_u, e_u, f_u)$ 、 $(a_v, b_v, c_v, d_v, e_v, f_v)$ は係数であり、小領域内の流速値から最小自乗法により求める。MLS法では、任意の点における流速値ばかりでなく、式(1)より空間微分値も求めることができる。

MLSの2次曲線当てはめに影響を及ぼす誤差は大きく分けて、ランダム誤差とシフト誤差の2つがある。

(ランダム誤差) 流速値に必ず含まれる誤差である。数値計算であれば、打ち切り誤差、離散化誤差や乱流モデルでは表現できない小さな渦運動などによる誤差等が考えられる。PTV計測では、トレーサ粒子の追従性による誤差、画像計測における粒子位置の計測誤差、

画像の撮影時間間隔による離散化誤差等が考えられる。

(シフト誤差) MLSにおける2次関数の適合に伴う誤差であり、適合領域が広すぎると2次関数では表現できない3次以上の項の影響が生じ、誤差を生じる。

適合領域を狭くすれば、2次関数の適合精度が上がる。しかし、適合領域が狭くなるとデータ数が少なくなり、ランダム誤差の影響を大きく受ける。ランダム誤差の影響を少なくするため、データ数を増やすために適合領域を広くすればシフト誤差の影響が大きくなる。よって、適合領域サイズを変化させるとランダム誤差とシフト誤差のトレードオフがあり、最適な適合領域サイズが存在するはずである。

3. MLSにおける2次関数適合領域

今回提案する手法の適合法にはガウス分布の重み付き最小自乗法を用いる。適合させる領域はガウス分布の標準偏差 λ により規定される。

簡単のために1次元の場合を説明する。基本的な式は2次元の場合も同じである。着目点 x_m の回りに2次曲線を適合させる場合の重み関数を以下の式で表す。

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} \exp\left\{-\frac{(x-x_m)^2}{2\lambda^2}\right\} \quad (3)$$

λ と等価幅 X_L とは以下の関係がある。

$$X_L = \sqrt{2\pi}\lambda = \gamma\lambda \quad (4)$$

ここで、 γ (≈ 2.507)は定数である。

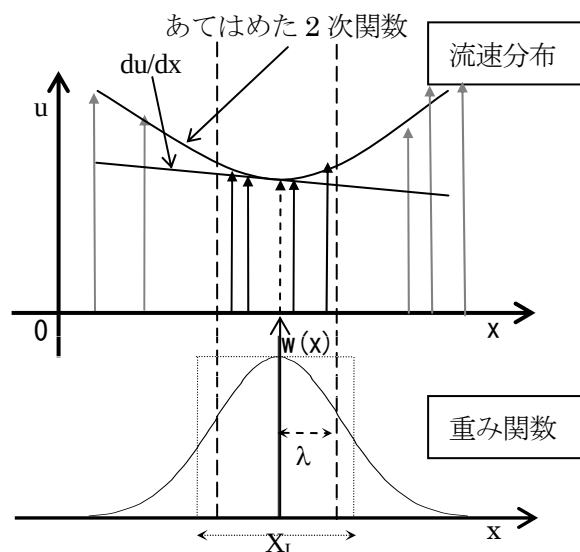


図-1 MLSによる微係数の推定法の概念図

4. 最適適合領域の理論的考察

まず、シフト誤差について考察する。求める関数を x_m まわりテーラー展開する。

$$y = f(x) = \delta_0 + \frac{\delta_1}{1!}(x - x_m) + \frac{\delta_2}{2!}(x - x_m)^2 + \frac{\delta_3}{3!}(x - x_m)^3 + \frac{\delta_4}{4!}(x - x_m)^4 + \varepsilon_x$$

ここで、 δ_n は関数 y の n 次の微係数である。 ε_x は点 x での 5 次以上の高次項の和である。

1 階の中央差分を考えると、以下の式となる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_m + \Delta x) - f(x_m - \Delta x)}{2\Delta x} = \delta_1 + 2 \times \frac{\delta_3}{3!} \Delta x^2 + \frac{\varepsilon_{xm+\Delta x} - \varepsilon_{xm-\Delta x}}{2\Delta x}$$

ここで $\varepsilon_{xm+\Delta x}$, $\varepsilon_{xm-\Delta x}$ は、それぞれ $x_m + \Delta x$, $x_m - \Delta x$ での 5 次以上の高次項の和である。上式の δ_1 は 1 次微係数、つまり dy/dx であり、3 次以上の奇数項が大きな誤差の原因となる。 Δx があまり大きくない範囲では、3 次の項が卓越する。よって、シフト誤差 ε_s は $\varepsilon_s \sim \frac{\delta_3}{3} \Delta x^2$ となる。

上式で Δx は、MLS ではおおそ等価幅 X_L の 1/2 に対応するので、 $\varepsilon_s \sim \frac{\delta_3}{3} \left(\frac{X_L}{2}\right)^2 \sim \delta_3 \lambda^2$ となる。よって、

シフト誤差は以下の式となる。

$$\varepsilon_s = \beta_s \delta_3 \lambda^2$$

ここで、 β_s は無次元定数である。

ランダム誤差に関しては、計測値に含まれる誤差と適合領域内の計測値の個数に關係する。統計学的にランダム誤差は、適合領域内での計測値の個数 n の平方根に反比例し、ノイズ σ_ε に比例する。よって、ランダム誤差 ε_N は $\varepsilon_N \sim \sigma_\varepsilon n^{-1/2} X_L^{-1}$ となる。単位面積当たりの計測点数を ρ (particle / pixel²) とすると、 n と ρ の關係は次式で表される。

$$n = \rho X_L^2 = \rho \gamma^2 \lambda^2 \quad (11)$$

よって、ランダム誤差 ε_N は $\varepsilon_N = \beta_N \sigma_\varepsilon \rho^{-1/2} \lambda^{-2}$ となる。

ここで、 β_N は無次元定数である。

シフト誤差とランダム誤差の和を ε_T とする。シフト誤差とランダム誤差は互いに独立であるので、誤差の和の自乗は、それぞれの誤差の自乗和となる。

$$\varepsilon_T^2 = \varepsilon_s^2 + \varepsilon_N^2 = \beta_s^2 \delta_3^2 \lambda^4 + \beta_N^2 \sigma_\varepsilon^2 \rho^{-1} \lambda^{-4} \quad (13)$$

上式を λ で微分し、0 とおけば最適適合領域 λ_{opt} が求まる。

$$\lambda_{opt} = \beta_T \delta_3^{-\frac{1}{4}} \sigma_\varepsilon^{\frac{1}{4}} \rho^{-\frac{1}{8}} \quad (14)$$

ここで、 β_s と β_N をまとめて一つの定数 β_T としておく。

5. シミュレーションによる精度比較

MLS を用いた PTV 計測結果からの渦度の推定法と

一般に用いられる格子点変換および循環法の精度比較のため、以下のようなシミュレーションを行った。

粒子を画像サイズ 1024×1024 (pixel) 内に一様乱数により発生させた。粒子の個数は 500、および 1000～10000 個の範囲で 1000 個間隔の 11 種類とした。また、発生させた粒子にサンプリング時間間隔 ΔT の間の移動量 $\Delta \xi$, $\Delta \psi$ を以下の式で与えた。

$$\Delta \xi(x, y) = A \sin(2\pi x / L) \sin(2\pi y / L) \quad (18)$$

$$\Delta \psi(x, y) = A \cos(2\pi x / L) \cos(2\pi y / L)$$

ここで、 L は渦のサイズを決定するパラメータで、渦の大きさは $L/2$ となり、今回のシミュレーションでは $L/2 = 512$ (pixel) とした。また、 A はサンプリング時間間隔 ΔT での最大移動量であり、今回は一般的な PTV で計測される最大の移動距離である $A = 10$ (pixel) とした。正規乱数によって発生させたノイズを加えた。発生させた正規乱数の条件は、平均値 0.0、標準偏差 S_r を 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0 (pixel/ ΔT) の 6 種類とした。各粒子個数、各ランダム誤差の条件に対して 10 個のデータを作成し、渦度推定法により渦度を求めた。

シミュレーション結果を図-2 に示す。黒塗りの印は MLS による渦度推定法によるもので、白抜きの印は格子点変換および循環法によるものである。すべてのケースにおいて、MLS を用いた場合の渦度推定法が格子点変換および循環法よりも精度がよい結果となった。

(参考文献) 1) 合田桂: MLS における最適適合領域サイズの理論解, 近畿大学理工学部土木工学科卒業論文, 近畿大学(1998)。

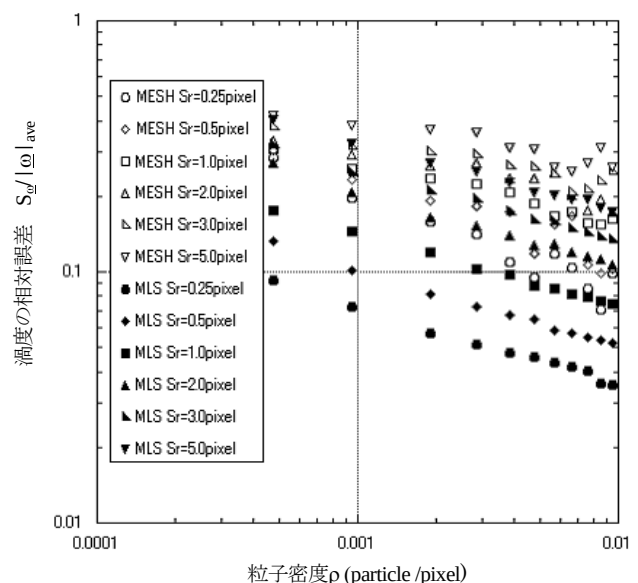


図-2 MLS を用いた渦度推定法と格子変換および循環法による渦度推定法の精度比較