

京都大学大学院

学生会員 ○藤本 慎司

京都大学大学院

学生会員 小濱 健吾

京都大学大学院

フェロー会員 小林 潔司

株式会社BMC

正会員 貝戸 清之

1. はじめに

ハザードモデルでは、特性や環境条件が同じである対象の劣化過程は同一になる。しかし、同一の特性かつ環境条件の下であっても劣化過程は個々に異なると考える方が自然である。したがって、より精緻な劣化予測を行うためには個々の劣化過程の異質性を考慮した劣化予測手法を開発する必要がある。そこで本研究では、ハザード率を確率変数として捉え、ハザード率の異質性がガンマ分布に従うランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルを用いて某公共施設の劣化予測の実証分析を行う。

2. 劣化モデルの定式化

(1) ランダム比例ワイブルハザード劣化モデル

いま、公共施設が、 N 種類のタイプの部材で構成されており、 i ($i = 1, \dots, N$) 番目の部材が、合計 N_i 個で構成されていると考えよう。いま、タイプ i の部材の j ($j = 1, \dots, N_i$) 番目の部材に着目しよう。当該部材が更新されてからの経過時間を t_i^j と表す。各部材の劣化事象の到着率がワイブル劣化ハザード関数

$$\lambda_i(t_i^j) = \gamma m \varepsilon_i (t_i^j)^{m-1} \quad (1)$$

に従うと考えよう。式(1)は、ワイブル劣化ハザード関数に、タイプ i のハザード率の異質性を表すパラメータ（以下、異質性パラメータと呼ぶ） ε_i が付加されている。異質性パラメータは、同一タイプの部材に対して共通の値をとる。しかし、部材のタイプが異なれば、異なる値をとると考える。異質性パラメータは、現実には確定的な値をとるが、観測者にとって観測不可能なパラメータである。また、タイプ i の部材 j の寿命の確率密度関数 $f_i(t_i^j)$ 、および生存確率 $\tilde{F}_i(t_i^j)$ は、それぞれ

$$f_i(t_i^j) = \gamma m \varepsilon_i (t_i^j)^{m-1} \exp\{-\gamma \varepsilon_i (t_i^j)^m\} \quad (2)$$

$$\tilde{F}_i(t_i^j) = \exp\{-\gamma \varepsilon_i (t_i^j)^m\} \quad (3)$$

と表される。

ここで、異質性パラメータの確率分布がガンマ分布に従うと考えよう。ここで、パラメータ γ をタイプ間の平均的なハザード到着密度を表すと考え、異質性パラメータ ε_i は、平均 1、分散 ϕ^{-1} のガンマ分布に従う確率誤差項であると考えよう。ガンマ分布が区間 $[0, \infty)$ で定義されており、任意の説明変数と確率誤差項に関して式(1)の右辺が正の値をとることが保証され、平均 1、

分散 $1/\phi$ のガンマ分布の確率密度関数 $\bar{g}(\varepsilon_i : \phi)$ は

$$\bar{g}(\varepsilon_i : \phi) = \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \varepsilon_i^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon_i) \quad (4)$$

と表される。

(2) 推計方法

いま、部材の劣化履歴を $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ と表そう。ここに、 $\xi_i = \{(\delta_i^1, t_i^1), \dots, (\delta_i^{N_i}, t_i^{N_i})\}$ ($i = 1, \dots, N$) である。また、 δ_i^j はタイプ i の部材 j ($j = 1, \dots, N_i$) が劣化した場合に値 1 を、劣化していない場合に値 0 をとるダミー変数である。 t_i^j は、タイプ i の部材 j の使用時間である。すなわち、 $\delta_i^j = 0$ の時、 t_i^j は前回の更新期から当該時刻までの期間長を意味する。一方、 $\delta_i^j = 1$ の時、 t_i^j は寿命を表す。ここで、異質性パラメータ ε_i を与件と考えよう。この時、タイプ i の劣化に関するデータ ξ_i が観測される条件付き尤度 $\ell_i(\xi_i : \gamma, m, \varepsilon_i)$ は、

$$\begin{aligned} \ell_i(\xi_i : \gamma, m, \varepsilon_i) \\ = \prod_{j=1}^{N_i} \{\tilde{F}(t_i^j : \gamma, m, \varepsilon_i)\}^{(1-\delta_i^j)} \{f(t_i^j : \gamma, m, \varepsilon_i)\}^{\delta_i^j} \end{aligned} \quad (5)$$

で表される。ただし、上式において、寿命分布の確率密度関数 $f(t_i^j : \gamma, m, \varepsilon_i)$ 、生存関数 $\tilde{F}(t_i^j : \gamma, m, \varepsilon_i)$ は、パラメータ γ, m, ε_i の関数として表現されることを明示的に示している。

ここで、異質性パラメータ ε_i が標準ガンマ分布 $\bar{g}(\varepsilon_i : \phi)$ に従って分布する場合、観測データ ξ_i が観測される尤度関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\xi_i : \theta) \\ = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{N_i} \{\tilde{F}(t_i^j : \gamma, m, \varepsilon_i)\}^{(1-\delta_i^j)} \\ \{f(t_i^j : \gamma, m, \varepsilon_i)\}^{\delta_i^j} \bar{g}(\varepsilon_i : \phi) d\varepsilon \end{aligned} \quad (6)$$

と表される。ただし、 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の各要素は $\theta_1 = \gamma, \theta_2 = m, \theta_3 = \phi$ と表される。対数尤度関数を最大にするようなパラメータ値 θ の最尤推定量は

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\hat{\theta}, \Xi)}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

を同時に満足するような $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3)$ として与えられる。パラメータの最尤推定量は、式(7)の3次元の非線形連立方程式を解くことにより得られる。本研究では、ニュートン・ラフソン法により最尤推定量を求めることとした。最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めれば、共分散行列の推定量 $\hat{\Sigma}(\hat{\theta})$ を用いて t -検定統計量を推定できる。

つぎに、パラメータベクトルの最尤推定量 $\hat{\theta}$ を与件と

して、異質性パラメータ ε_i ($i = 1, \dots, N$) の最尤推計値を求めよう。ここで、部分尤度関数を

$$\mathcal{L}_i^o(\xi_i, \hat{\theta} : \varepsilon_i) = \frac{\hat{\phi}^{\hat{\phi}}}{\Gamma(\hat{\phi})} \prod_{j=1}^{N_i} \{\hat{\gamma} \hat{m} (t_i^j)^{\hat{m}-1}\}^{\delta_i^j} \varepsilon_i^{s_i + \hat{\phi} - 1} \exp\{-(\hat{\phi} + \hat{\gamma} \hat{t}_i) \varepsilon_i\} \quad (8)$$

と定義しよう。ただし、 $\hat{t}_i = \sum_{j=1}^{N_i} (t_i^j)^{\hat{m}}$ である。この時、異質性パラメータ ε_i の最尤推定量は

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}_i^o(\xi_i, \hat{\theta} : \varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_i} = 0 \quad (9)$$

を満足するような $\hat{\varepsilon}_i$ として求めることができる。このようにして求めた異質性パラメータの最尤推定量は、パラメータ $\hat{\theta} = (\hat{\gamma}, \hat{m}, \hat{\phi})$ を与件として求めた推定量である。このことを明示的に表現するために、式(9)の解を、 $\hat{\varepsilon}_i(\hat{\theta})$ と表そう。式(8),(9)より、具体的に $\hat{\varepsilon}_i(\hat{\theta})$ を求めれば次式を得る。

$$\hat{\varepsilon}_i(\hat{\theta}) = \frac{s_i + \hat{\phi} - 1}{\hat{\phi} + \hat{\gamma} \hat{t}_i} \quad (10)$$

3. 適用事例

(1) 適用事例の概要

本研究では、推計対象として、某公共施設より集計された外壁の情報を採用した。具体的な項目としては、33地域の施設各々の外壁を構成する部材であるタイル、複層仕上塗材、薄付仕上塗材、金属、CBを劣化推計対象として取り上げた。今回適用事例として取り上げた施設は数多くの部材を有するために、初期不良により使用開始から劣化時点までの期間が非常に短い部材がごく稀に存在する。このため、今回の推計にあたり、初期不良と考えられるサンプルについては除外することにした。初期不良サンプルは、使用開始から1年以内に修繕が行われたサンプルである。以上の操作により、今回データベースの中から用いることができたサンプル総数は、外壁部分ではタイル77サンプル、複層仕上塗材35サンプル、薄付仕上塗材52サンプル、金属20サンプル、CB26サンプルであった。したがって、サンプル総数は210サンプルとなる。

(2) 劣化推計

表-1 外壁:パラメータの推計結果			
	β	m	ϕ
最尤推定量	-15.46	4.12	4.16
(t 値)	(-11.18)	(11.18)	(1.17)
対数尤度	-323.57		

ランダム比例ワイブルハザード劣化モデルにより推計した結果を、表-1、表-2に整理する。ただし β は、 $\gamma = \exp(\beta)$ を満たすような β である。また ε_i ($i = 1, \dots, 5$) はそれぞれタイル、複層仕上塗材、薄付仕上塗材、金属、CBの異質性パラメータ値を表す。表-1の加速度パラメータの最尤推定量は $m = 4.12$ となってい

表-2 外壁:異質性パラメータ

種類	異質性パラメータ
タイル	0.35
複層仕上塗材	0.60
薄付仕上塗材	1.82
金属	1.27
CB	0.62

表-3 期待寿命(外壁)

種類	期待寿命
タイル	49.93年
複層仕上塗材	43.80年
薄付仕上塗材	33.46年
金属	36.51年
CB	43.46年

る。式(3)より、実際に、各タイプの部材の生存確率が使用期間の増加に伴って加速度的に減少していくことがわかる。一般的に $m = 1.00$ であれば劣化確率が時間に依存しない偶発劣化と考えられるが、解析対象部材は明らかに消耗劣化であるといえる。また表-2の ε_i の大小関係により各部材の劣化確率の推移(劣化速度)を比較できるという特性をもつ。表-2より、 $\varepsilon_3 > \varepsilon_4 > \varepsilon_5 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ であるので、外壁の中では薄付仕上塗材が最も劣化が進行しやすく、タイルが最も劣化が進行しにくいということがわかる。

ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデルに基づいて計算した期待寿命を表-3に示す。この表を確認することで劣化の進行速度が $\varepsilon_3 > \varepsilon_4 > \varepsilon_5 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ であることが再確認できる。

以上より、同じ外壁というタイプであっても異質性パラメータに大きなばらつきがあることが確認された。つまり、多品種の部材で構成されるような大規模施設のハザード劣化モデルを推計するためには、混合分布を用いたランダム比例ワイブルハザードモデルが有効であることが理解できる。また、ハザード率を確定的に扱っただけでは考慮することができない個別部材の劣化発生確率を推定することができるので、アセットマネジメントの精緻化に資することも期待できる。

4. おわりに

本研究では、ランダム比例ワイブルハザード劣化モデルを用いた劣化推計モデル提案した。その際各部材が、少数・多品種のタイプで構成されることに着目し、タイプ間におけるハザード率の異質性を表現できるような混合ハザードモデルが必要であることを指摘した。公共施設を対象とした適用事例を通じて、提案したハザードモデルの有効性を実証的に検証した。