

第IV部門

Knight 流不確実性下での災害債券の最適発行スキーム問題に関する基礎的研究

神戸大学 学生会員 ○白井 宏明

神戸大学大学院自然科学研究科 正会員 長江 剛志

神戸大学 正会員 竹林 幹雄

神戸大学 フェロー会員 黒田 勝彦

1. はじめに

本研究では、保険制度に変わるリスクヘッジ手段である災害債券に着目し、災害の稀少性（Knight 流不確実性）を明示的に考慮した設計問題を分析するための枠組を提案する。まず、災害債券発行問題を企業と投資家間のインセンティブ設計問題として定式化する。ここで、稀少事象下での投資家の行動を、ロバスト期待効用理論を用いて記述する。最後に、数値解析を行いモデルの特性およびメカニズムを明らかにする。

2. 本研究の基本的な考え方

本章では、本研究のモデルの重要な特徴である災害債券の枠組、およびロバスト期待効用理論の基本的考え方を整理する。まず災害債券の枠組について述べる。本研究で取り扱う災害債券は、債券発行する企業と債券を購入する投資家の二主体間で交わされる契約体系である。企業は、災害のリスクを回避するために災害債券を用いる。具体的には、他者（i.e., 投資家）に対し、利子（プレミアム）を支払うことでリスクを移転する。すなわち、期末（履行時）災害が発生しなければ、投資家はプレミアム分の利益を得る。しかし、災害が発生した場合、投資家は債券契約の際支払った元本の損失という形で不利益を被る。資金の流れは以下の図のように与えられる。

表-1 資金の流れ

	支払い額	受け取り額
企業	プレミアム	元本 (該当事象発生時)
投資家	元本 (該当事象発生時)	プレミアム+元本

具体的に、債券契約時における企業の確率的収益 y_1 、投資家の確率的収益 w_1 は、リスク移転比率 α 、プレミアム π 、被害額 X とすると

$$y_1 = \{-\alpha X \pi (\text{災害無し}), -(1-\alpha)X (\text{災害発生})\}$$

$$w_1 = \{w + \alpha X \pi (\text{災害無し}), w - \alpha X (\text{災害発生})\}$$

と表すことができる。また各々の利得の状態を以下の絶対危険回避度一定型効用関数

$$u(w_i) = -\exp[-\gamma_i w_i] \gamma_i \quad (i = I, F) \quad (1)$$

で評価すると仮定する。

本研究では、投資家が、災害の Knight 流不確実性に直面すると仮定し、その行動をロバスト期待効用理論の枠組を用いて記述する。元本損失をもたらす災害事象が稀少であるため、その発生頻度を確率統計手法に基づいて、①信頼できる客観的確率を求める事も、②意思決定主体の経験に基づいて主観的確率を一意に決める事もできない状況を指す

このような Knight 流不確実性下での意思決定は、従来の期待効用理論では適切に表現できないことが知られている。そこで本研究では、Knight 流不確実性を明示的に考慮した期待効用理論の一般化としてロバスト期待効用理論を用いて投資家の行動を記述する。具体的には、投資家の主観的確率（ロバスト確率 Q^* ）を以下の最適化問題；

$$[RP] \quad Q^* = \arg \min_Q \{E^Q[u(w)] + \frac{1}{\theta} D(\hat{P}, Q)\}$$

の解として求め、それを用いて期待効用を評価する。

Knight 流不確実性下では、意思決定主体の主観的確率 Q が一意に決まらない。そのため、よりロバストな意思決定基準を採用する。言い換えれば、確率的状況において最も悲観的な状況を想定した基準を採用するといえる。しかしながら、意思決定基準は、ある外性的な情報（i.e., 客観的確率 $\hat{P}$ ）があることで内省的な意思決定に影響を及ぼす。式(1)

は、ロバストパラメタ θ を用いて上記の意思決定主体の基準特性を明示的に表記したものである。

なお、債券の発行主体である企業は Knight 流不確実性に直面しないと仮定する。すなわち、自らが提示する客観的確率 $\hat{P}$ を用いて、従来の期待効用理論に従って意思決定を行うとする。これは、債券発行主体に際して災害発生確率を提供する企業が、自らの情報を信頼しない状況を想定し難いためである。

3. モデルの定式化

本章では、企業と投資家の間のインセンティブ設計問題として災害債券設計問題を定式化する。まず、企業は、投資家の債券購入にインセンティブを与えるような債券を設計しなければならない。すなわち、投資家にとって債券を購入するほうが、購入しない場合より高いロバスト期待効用をもたらすように、債券設計する必要がある。このインセンティブ誘因条件は、以下の式で表される。

$$E^{Q^{*(\theta)}}[u_I(w_1)] \geq u_I(w_0) \quad (2)$$

ここで u_I は投資家の効用関数。 w_1 は債券契約時の投資家の確率的収益。 w_0 は債券契約を交わさない

時の収益である。企業はこのインセンティブ誘因条件の下で、自らの期待効用を最大化するように、リスク移転比率 α とプレミアム π を決定する。これは次のように定式化される。

$$\max_{\alpha, \pi} E^P[u_F(y_1)] \quad \text{s.t.} (2) \quad (3)$$

ここで、 u_F は企業の効用関数、 y_1 は債券契約時の企業の確率的収益を示す。

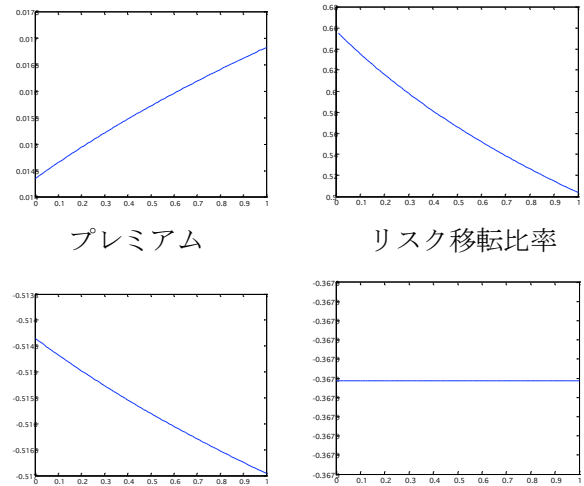
4. 数値計算例

本章では、以下のパラメタをベースケースとし、ロバストパラメタ θ を変化させて感度分析を行った結果を示す：

$$\gamma_I = 1, \gamma_F = 2, p = 0.01, X = 1, w = 1.$$

まず、図2の上側の2つのグラフは、横軸にロバストパラメタ θ 、縦軸にプレミアム π およびリスク移転比率 α をそれぞれプロットしたものである。これらの図より θ が上昇することで、投資家がより高いプレミアムを要求し、結果として企業のリスク移率を引き下げることが示している。

次に、図2の下側の2つのグラフは、横軸に θ 、



企業の期待効用

投資家のロバスト期待効用

図-2 ロバストパラメタに対する感度分析

縦軸に企業の期待効用および投資家のロバスト期待効用を、それぞれプロットしたものである。この図より、 θ が減少することで、投資家のロバスト期待効用は変化しないが、企業の期待効用は上昇することがわかる。このことは、Knight 流不確実性の低下が企業と投資家にパレート改善をもたらすことを意味している。

5. おわりに

本研究では、まず、災害の稀少性を明示的に考慮するためにロバスト期待効用理論を用いての災害債券の最適な発行のための枠組みの提案を行った。さらに、数理解析および数値解析を行い、モデルの性質とそれに関する様々な検証を行った。

本稿では、Knight 流不確実性を減少させることがパレート改善をもたらすことを示した。これを実現するための方法としては、科学技術の進展による地震生起確率の推定精度（信頼性）の向上が考えられる。また、災害債券そのものを市場に流通させることで投資家の経験を増大させるといったことが考えられる。今後のリスクマネジメント政策を考える上では、上記のような視点が必要不可欠となるだろう。