第II部門　　LES における動的境界モデルに関する研究

神戸大学工学部　学生員　○北野 有哉
神戸大学大学院自然科学研究科　正会員　中山 昭彦

1. 序論

近年のコンピュータ性能の飛躍的向上に伴い，LES が実用化可能段階に到りつつある．しかし依然として，LES には境界近傍の格子幅を広く取ると境界近傍の流速が低くなるという問題がある．本研究はこの原因が境界近傍での粗視化操作と微分操作の非互換性を無視していることにあると考え，互換誤差をモデル化，そしてモデルパラメータを動的に与えることで，このモデルが適切に互換誤差を表現し，理想的な値の境界近傍の流速を算出できると考えた．本報はこの動的境界モデルの提案および，その有効性の提示を目的とする．

2. 陽的フィルタリングによる LES 基礎方程式

まず格子幅 $\overline{\Delta}$ のフィルタ関数 $G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ を点 $\boldsymbol{x}$ を中心に 1/2 の範囲で一定の値 1 , それ以外では 0 をもつ重み関数, $w(\boldsymbol{x})$ を用いて以下のように定義する．

$$G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta})}{W_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x})} \tag{1}$$

尚，フィルタ関数の性質上 $\iiint_D G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dV_{\boldsymbol{\xi}} = 1$ となる為，$W_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x}) = \iiint_D w((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})/\overline{\Delta})dV_{\boldsymbol{\xi}}$ とする．D は流れ場全域を示す．

この関数を用いてベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の勾配 $\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x})$ を粗視化したものは，以下のように展開できる．

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x})} &= \iiint_D G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nabla_\xi f}(\boldsymbol{\xi})dV_{\boldsymbol{\xi}} \\
&= \iint_S G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{n}dS_{\boldsymbol{\xi}} \\
&\quad + \iiint_D \boldsymbol{\nabla_x} G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})dV_{\boldsymbol{\xi}} \\
&\quad - \iiint_D \boldsymbol{\nabla_\xi} G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}dV_{\boldsymbol{\xi}} \\
&= \iint_S G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})-\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\right)\boldsymbol{n}dS_{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} \\
&= \overline{\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}}^S + \boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで S は粗視化前の境界面，$\boldsymbol{n}$ は粗視化前の境界面に対する法線ベクトルである．また $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$ $\left(=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\right)$ は粗視化によって除かれた $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の $\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$ に対する変動成分 (sub-filter scale) ，そして $\overline{\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}}^S$ $\left(=\iint_S G_{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{n}dS_{\boldsymbol{\xi}}\right)$ が粗視化前の流れ場の境界面における f'' のフラックス体積フィルタ平均であり，先に述べた互換誤差である．

この互換誤差を考慮して LES 基礎方程式を改めて導出し直すと次のようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\
&\quad + \overline{\overline{u_i u_j} n_j}^S - \frac{1}{\rho}\overline{(p-\overline{p})n_i}^S \\
&\quad + \nu\left[-\frac{\partial \overline{\overline{u_i} n_j}^S}{\partial x_j} + \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_j}\right)n_j}^S\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

ここに τ_{ij} は SGS 応力である．

式 (3) の右辺第四項以降が互換誤差を考慮する項であり，境界に接するセルの計算時にのみ必要となる．これらの項および τ_{ij} は非解像成分で表されている為，τ_{ij} は Smagorinsky 定数 C_s が 0.18 の標準 Smagorinsky モデルを用いてモデル化し，式 (3) の右辺第四項以降の各項を以下のようにモデル化する．

$$\overline{\overline{u_i u_j} n_j}^S = -C_r\frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}}|\overline{\boldsymbol{S}}|\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\overline{n_j} \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\rho}\overline{(p-\overline{p})n_i}^S = C_d\frac{A_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3}|\overline{\boldsymbol{u}}|\overline{u_i} \tag{5}$$

$$\nu\left[-\frac{\partial \overline{\overline{u_i} n_j}^S}{\partial x_j} + \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_j}\right)n_j}^S\right] = C_f\frac{\Sigma_{\overline{\Delta}}}{\overline{\Delta}^3}|\overline{\boldsymbol{u}}|\overline{u_i} \tag{6}$$

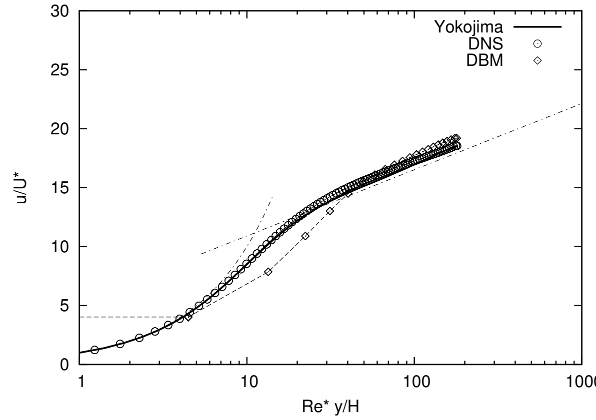
モデルパラメータの決定に際しては，Germano *et al* [1] によって提案された動的手法を応用して Germano identity の形を導出し, Lilly [2] による最小二乗法を用いて毎時・各点で算出した．詳細については北野 [3]を参照して戴きたい．

このモデルは流れ場 境界近傍の局所的性質を表現していると思われ，応力の次元をもつことから，この平方根を境界面上の流速として与え，シミュレーションを行った．計算対象は x,y,z 方向に長さ $3H, H, 1.6H$，$x{-}z$ 方向に周期境界をもつ領域で，格子数 $60\times88\times32$ の DNS，$60\times20\times32$ の標準 Smagorinsky モデル (以下 SM) のみを導入した LES, および SM に今回導入するモデル DBM を加えた LES の三種のシミュレーションを, 全て，水深と壁面摩擦速度に基づく Re_τ を 180，無次元時間刻み幅 0.002 で行った．

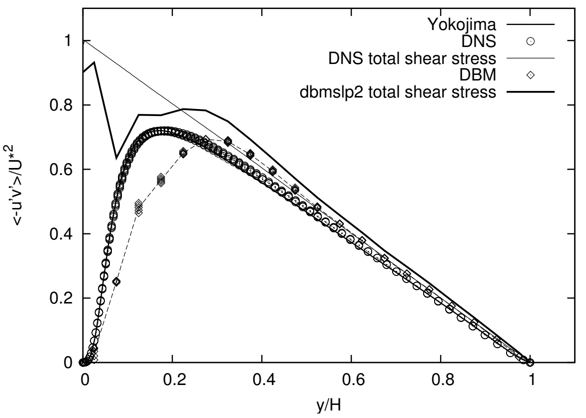
3. 結果

図-1-図-6 に平均流速分布，レイノルズ応力分布，及び乱流強度分布の計算結果を示す．Yokojima は Re_τ を 180 として格子数 116 × 96× 128 で行われた DNS 結果[4]である．

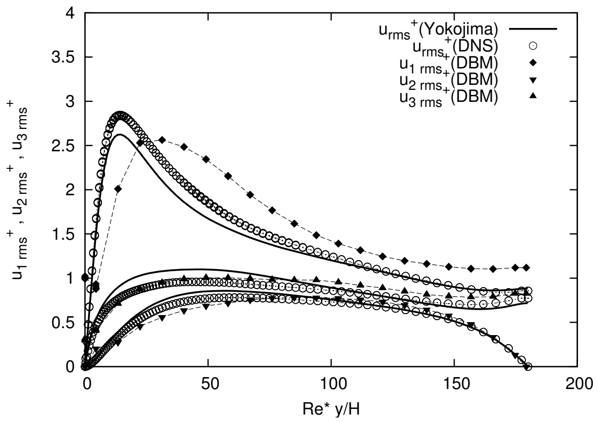
Yuya KITANO, Akihiko NAKAYAMA



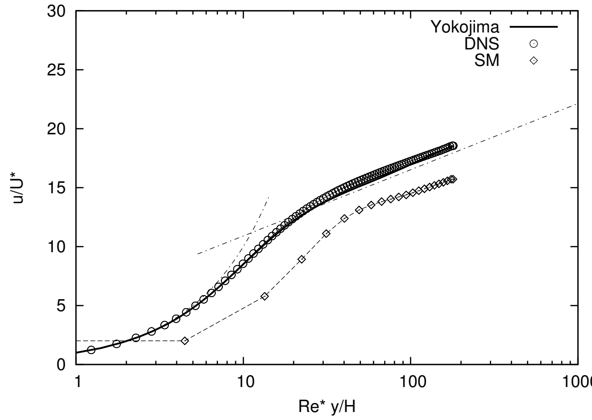
図–1 平均流速分布 (DBM) (破線は理論値)



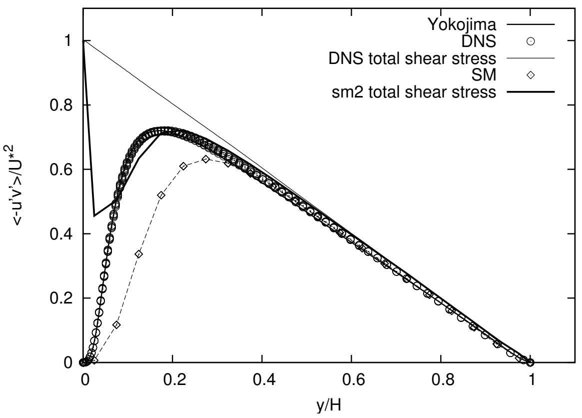
図–2 レイノルズ応力分布 (DBM)



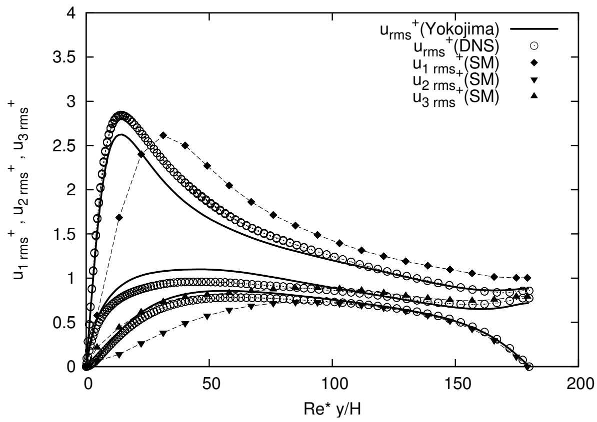
図–3 乱流強度分布 (DBM)



図–4 平均流速分布 (SM) (破線は理論値)



図–5 レイノルズ応力分布 (SM)



図–6 乱流強度分布 (SM)

本研究の DBM により境界一点目の流速が理論値に近付き，DBM を除いては標準 Smagorinsky モデルしか用いないにも関わらず，流れ場全域に対してかなりの再現性の改善を確認できる．DBM の性質上，機能しているのは境界ごく近傍，実質的には境界一点目のみであることから，これまで境界一点目の流速を低く見積もる原因は，乱流モデルによる強い抑えの効果の為だけだと思われていたが，非互換性を無視し，考慮すべき流速の一部を無視していたことにもあるということができる．そして境界近傍の流速を正確に予測できれば，少なくとも開水路を対象とする場合，基本モデルを標準 Smagorinsky モデルとしたまま十分正確に流れ場全域を再現できるものと考える．

参考文献

1) M.Germano,U.Piomelli,P.Moin,W.H.Cabot:A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model,*Phys. Fluids A*, Vol.3,No.7,pp.1760-1765,1991.7
2) D.K.Lilly:A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method,*Phys. Fluids A*, Vol.4,No.3,pp.633-635,1992.3
3) 北野 有哉：LES 解析における動的境界モデルに関する研究, 神戸大学工学部卒業論文，2006.2
4) Yokojima, S.: Modeling and Simulation of Turbulent Open-Channel Flows Emphasizing Free-Surface Effects, *Kobe University Doctor of Engineering*, 2002.