

## 第 部門 後退 Euler 積分法と整合接線剛性を用いた弾塑性解析について

大阪大学大学院 学生員 玉川 新悟  
 大阪大学大学院 正会員 三好 崇夫  
 大阪大学大学院 正会員 奈良 敬

### 1. はじめに

鋼橋の維持管理の合理化を考えた場合、腐食損傷を受けた鋼橋の残存耐力を有限要素解析によって把握し、架け替え、補修・補強の可否を診断する技術の確立が望まれる。腐食損傷を受けた鋼橋の残存耐力を有限要素解析により把握するためには、精度、信頼性や効率性に優れた弾塑性有限変位解析理論に基づき、腐食の進行に伴う断面欠損による初期不整の変化を考慮する必要のあることが示されている<sup>1)</sup>。そこで、残存耐力を有限要素解析によって精度よく把握することを目指し、本研究では、まず、高精度で効率的な弾塑性解析法を導入した8節点アイソパラメトリックシェル要素を有する弾塑性有限変位解析コードを開発した。その妥当性と精度、および効率性について、数値解析例を通して検証した結果をここに報告する。なお、本文では、増分理論を用いて弾塑性解析法を示すために擬似的な時間の概念を用い、諸量の左肩に  $t$  を付した諸量は解析済みの既知状態、および時刻  $t+\Delta t$  は求めようとしている未知状態の諸量を表すものとする。

### 2. 弾塑性解析法の概要

一般的な弾塑性解析では、応力状態に応じた剛性の評価と応力積分が必要となる。応力積分は、応力増分を求める際に、弾塑性構成テンソルを評価する時刻によって種々の手法が考案されているが、本研究では、時刻  $t+\Delta t$  の弾塑性構成テンソルを用いて応力を厳密に算定できる後退 Euler 積分法を採用する。また、シェル要素に対する後退 Euler 積分法アルゴリズムは、解くべき方程式を相当応力と相当塑性ひずみのみで表す、リターンマッピング法を用いる。しかし、後退 Euler 積分法は、剛性の評価に通常の弾塑性構成テンソル  $C^{ep}$ 、非線形計算法に完全 Newton-Raphson 法を用いると、 $C^{ep}$  が無限小のひずみと応力増分の間に成立するものとして導かれているため、大きなひずみ増分に対しては収束性の悪化することが知られている<sup>2)</sup>。そこで、有限なひずみと応力増分間に成立する整合接線弾塑性構成テンソルを用いて整合接線剛性を評価し、収束性を改善する手法を採用した。

整合接線弾塑性構成テンソル  $C^{ep*}$  は、以下に示すように、求めようとする時刻  $t+\Delta t$  に生ずる応力  ${}^{t+\Delta t}\sigma$ 、相当塑性ひずみ  ${}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}^p$ 、相当応力  ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$  に関する式と、単軸状態の応力とひずみの関係式から導かれる。

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + C : ({}^{t+\Delta t}e - {}^te - \Delta\lambda P : {}^{t+\Delta t}\sigma) \quad (1), \quad {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}^p = {}^t\bar{\epsilon}^p + \frac{2}{3}\Delta\lambda {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma} \quad (2), \quad {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}{}^{t+\Delta t}\sigma' : {}^{t+\Delta t}\sigma' \quad (3), \quad d {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma} = {}^{t+\Delta t}H' d {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}^p \quad (4)$$

ここに、 $C$  : 線形弾性構成テンソル、 $e$  : 全ひずみテンソル、 $\Delta\lambda$  : 塑性ひずみ増分を決定する比例定数、 $\sigma'$  : 偏差応力テンソル、 $P$  :  $\sigma' = P : \sigma$  なる4階変換テンソル、および  $H'$  : 硬化係数である。

式(1)~(3)を時刻  $t+\Delta t$  で全微分し、式(4)の関係を代入して変形することにより、次式で表される。

$$d {}^{t+\Delta t}\sigma = C^{ep*} d {}^{t+\Delta t}e \quad (5), \quad C^{ep*} = C^* - \frac{(C^* : {}^{t+\Delta t}\sigma') \otimes (C^* : {}^{t+\Delta t}\sigma')}{{}^{t+\Delta t}\sigma' : (C^* : {}^{t+\Delta t}\sigma') + 4\gamma {}^{t+\Delta t}H' {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}^2 / 9} \quad (6), \quad C^* = (C^{-1} + \Delta\lambda P)^{-1} \quad (7), \quad \gamma = \left(1 - \frac{2}{3}{}^{t+\Delta t}H'\Delta\lambda\right)^{-1} \quad (8)$$

なお、以上で記した式において、 $\otimes$  はテンソル積、および  $:$  はテンソルの内積を表す。

### 3. 解析例と妥当性の検証

解析例は、増分法と完全 Newton-Raphson 法による反復計算を併用し、正規化エネルギー残差が  $1.0 \times 10^{-10}$  を下回るまで反復計算を繰り返した。

### 3.1 平板の巻き上げ解析

平板は Fig.1 に示すようにモデル化した。解析結果として、 $M$  を降伏モーメント  $M_Y$  で除したパラメータと、自由端における曲げ角度  $\varphi$  を降伏曲げ角度  $\varphi_Y$  で除したパラメータの関係を初等理論値とともに Fig.2 に示す。Fig.2 より、両者は良好に一致しており、解析法は妥当であると判断できる。また、Fig.3 は各増分の反復計算回数の推移を示したものであり、縦軸は次式で定義した反復計算回数の差  $N_r$  を表す。

$$N_r = N_n - N_c \quad (9)$$

ここに、 $N_n$ ：通常の弾塑性剛性を用いた場合の各増分での反復回数、 $N_c$ ：整合接線剛性を用いた場合の各増分での反復回数である。Fig.3 より、整合接線剛性を用いたケースは、通常の弾塑性剛性を用いたケースに比べて、反復回数が減少している。このことから整合接線剛性の有効性が確認できる。

### 3.2 周辺単純支持された圧縮板

圧縮板は Fig.4 のようにモデル化し、初期たわみは考慮し、残留応力は無視した。

Fig.5 は、平均圧縮応力 ( $\sigma_{mean}$ ) と、Fig.4 に示される板中央の  $A$  点でのたわみ ( $W_c$ ) との関係について、小松らによる弾塑性有限変位解析結果<sup>3)</sup>、および Coan による弾性有限変位問題としての級数解<sup>4)</sup> とともに示したものである。Fig.5 より、本解析結果は、弾性有限変位解析では級数解、および弾塑性有限変位解析では小松らの解析結果と良好に一致しており、弾塑性有限変位解析は妥当であると判断できる。

次に、Fig.6 は、最初に降伏した増分からの、各増分での反復計算回数の推移を示したものであるが、整合接線剛性を用いた解析ケースの反復回数は、通常の弾塑性剛性を用いた解析ケースに比べて低下し、整合接線剛性の採用によって計算効率の向上することが確認できる。

### 4. まとめ

本文では、整合接線弾塑性構成テンソルを導いて解析コードに導入するとともに、それを用いた弾塑性有限変位解析を実施した。その結果、弾塑性解析法の妥当性と、整合接線剛性の使用による収束性の改善が示された。

【参考文献】 1) 後藤芳顯, 川西直樹: 腐食などの体積欠損による鋼構造物の残留応力・残留たわみの変化の解析と圧縮板の残存耐荷力評価, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.127-138, 2005. 2) Simo, J.C. and Taylor, R.L.: Consistent Tangent Operators for Rate-dependent Elasto-plasticity, Comp.Meth.in Appl.Mech.and Eng., Vol.48, pp.101-118, 1985. 3) 小松定夫, 北田俊行, 宮崎清司: 残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, 第 244 号, 1975. 4) Coan J.M.: Large Deflection Theory for Plates with small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. of Applied Mech., Vol.18, No. 2, June, 1951.

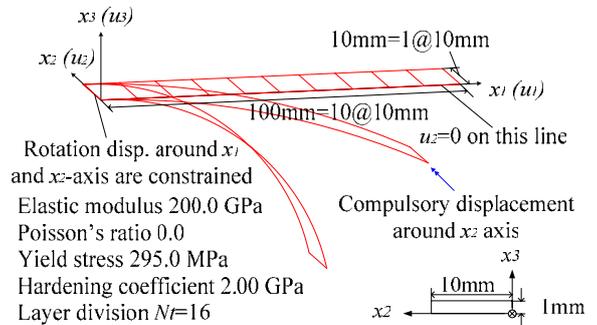


Fig.1 Analytical model for a "rolling-up" beam

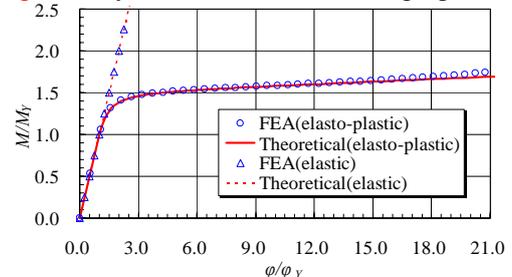


Fig.2 Relationship between  $M$  and  $M_Y$

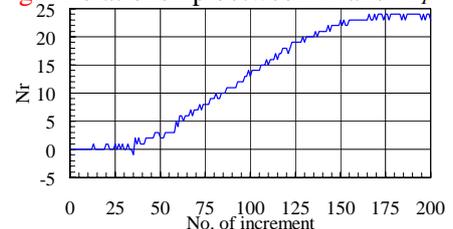


Fig.3 Difference of iteration numbers for the "rolling up" model shown in

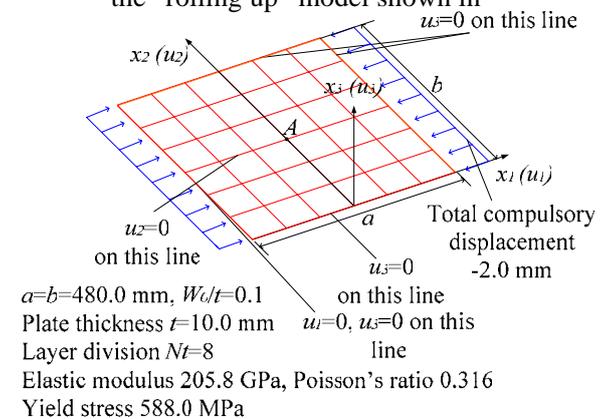


Fig.4 Analytical model for a compressed plate

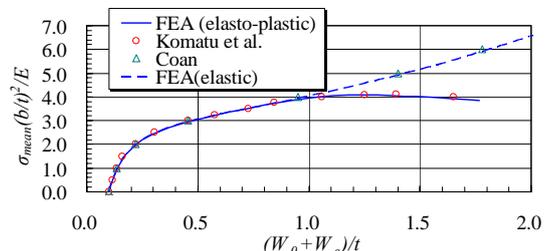


Fig.5 Relationship between stress and deflection

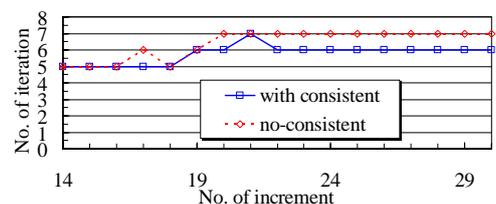


Fig.6 Iteration numbers in each increment for the compressed plate shown in