

第 部門

面内方向を異方軸とした横等方性矩形厚板の衝撃応答解析

大阪市立大学大学院 学生員（現大阪市） ○近安 規晃
大阪市立大学大学院工学研究科 正会員 小林 治俊

1. はじめに

近年、複合材料の広範な工学分野への適用・応用が盛んになりつつある。複合材料は巨視的には横等方性と見なすことができ、先に筆者の一人は板厚方向を異方軸とする横等方性矩形板を衝撃応答解析を行った[1]。そこで本研究は、三次元弾性論に基づき、面内方向を異方軸とする横等方性矩形板の衝撃応答解析を行った。解析には、固有関数展開法を用いたが、本手法は、対象とする問題の固有関数が求まれば、通常の構造物の動的応答解析に用いられているモード法と同様にして解を求めることができ、煩雑なラプラス逆変換を必要としない利点がある。

数値計算例では、Mindlin 平板の解析結果とも比較を行い、材料異方性が応答に及ぼす影響を調べた。

2. 横等方性厚板の基礎式

本解析で取り扱う横等方性矩形板の座標系を図 1 に示す。矩形板は、 x 軸を異方軸、 yz 面は等方面とし、辺長を $a \times b$ 、板厚を h とするものである。座標方向の変位を u, v, w 、そしてドットを時間微分とすると、基礎式は以下ようになる。ここで、 ρ は密度である。

$$L_u(u, v, w) = \rho \ddot{u}, \quad L_v(u, v, w) = \rho \ddot{v}, \quad L_w(u, v, w) = \rho \ddot{w} \quad (1)$$

そして、 L_u, L_v, L_w の内容は、

$$\begin{aligned} L_u(u, v, w) &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{12} + C_{55}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &\quad + (C_{12} + C_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ L_v(u, v, w) &= (C_{12} + C_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{55} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &\quad + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ L_w(u, v, w) &= C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{12} + C_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ &\quad + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

である。材料定数 C_{ij} の工学的表示は以下である。

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-n}{ER}, \quad C_{12} = \frac{n'}{E'R}, \quad C_{22} = \frac{E' - n'^2 E}{(1+n)E'^2 R}, \quad C_{23} = \frac{n'^2 E + nE'}{(1+n)E'^2 R} \\ C_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2}, \quad C_{55} = G', \quad R = \frac{1}{E'} \left\{ \frac{1}{E} (1-n) - 2 \frac{n'^2}{E'} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 E, n はそれぞれ等方面でのヤング率、ポアソン比であり、 E', n', G' はそれぞれ等方面と異方面に関してのヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数である。

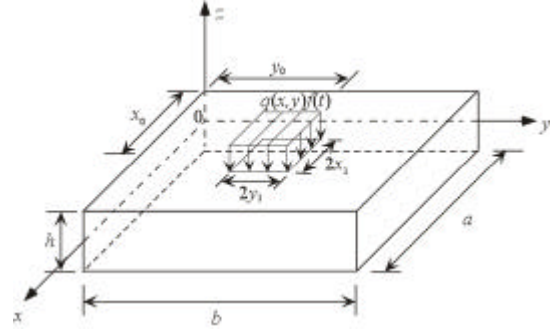


図 1 矩形板の座標系

3. 衝撃応答解析

矩形板は、4 辺単純支持されているものとする。固有関数展開法[1]に従えば、式(1)の解を次のようにおく。

$$u = u^s + u^d, \quad v = v^s + v^d, \quad w = w^s + w^d \quad (4)$$

ここで、 u^s, v^s, w^s は式(1)の慣性項を省いた場合の解であり、次のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} u^s(x, y, z, t) \\ v^s(x, y, z, t) \\ w^s(x, y, z, t) \end{bmatrix} = f(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{mn}^s(z) \cos a_m x \sin b_n y \\ V_{mn}^s(z) \sin a_m x \cos b_n y \\ W_{mn}^s(z) \sin a_m x \sin b_n y \end{bmatrix} \quad (5)$$

また、以下の境界条件を満足する。

$$\begin{aligned} u_x^s &= v^s = w^s = 0 & (x=0, a) \\ v_y^s &= u^s = w^s = 0 & (y=0, b) \\ u_z^s &= -q(x, y), \quad t_{zx}^s = t_{yz}^s = 0 & (z=h/2) \\ u_z^s &= t_{zx}^s = t_{yz}^s = 0 & (z=-h/2) \end{aligned} \quad (6)$$

一方、 u^d, v^d, w^d は、自由振動解析より求められる固有関数（振動モード関数） $U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}$ と未定の時間関数 $Q_{mnl}(t)$ の積からなる級数で次のように与えることができる。

$$\begin{bmatrix} u^d(x, y, z, t) \\ v^d(x, y, z, t) \\ w^d(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) \begin{bmatrix} U_{mnl}(z) \cos a_m x \sin b_n y \\ V_{mnl}(z) \sin a_m x \cos b_n y \\ W_{mnl}(z) \sin a_m x \sin b_n y \end{bmatrix} \quad (7)$$

固有関数は、固有円振動数を ω_{mnl} とすると、以下に示す式(8)の境界条件および自由振動問題のつり合い式(9)を満足する。

$$\begin{aligned} u_x^d &= V_{mnl} = W_{mnl} = 0 & (x=0, a) \\ v_y^d &= U_{mnl} = W_{mnl} = 0 & (y=0, b) \\ u_z^d &= t_{zx}^d = t_{yz}^d = 0 & (z=\pm h/2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L_u(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -r w_{mnl}^2 U_{mnl} \\ L_v(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -r w_{mnl}^2 V_{mnl} \\ L_w(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -r w_{mnl}^2 W_{mnl} \end{aligned} \quad (9)$$

また, d_{mp}, d_{nq}, d_{lr} をクロネッカーのデルタ, N_{mnl}^2 をノルムとすると, 固有関数には以下に示す直交性がある.

$$\int_V (U_{mnl} U_{pqr} + V_{mnl} V_{pqr} + W_{mnl} W_{pqr}) dV = d_{mp} d_{nq} d_{lr} N_{mnl}^2 \quad (10)$$

ここで, 式(1)に式(4)を代入し, 式変形を行うと,

$$\begin{aligned} L_u(u^d, v^d, w^d) &= r \ddot{u}^d + r \ddot{u}^s \\ L_v(u^d, v^d, w^d) &= r \ddot{v}^d + r \ddot{v}^s \end{aligned} \quad (11)$$

を得る. 次に式(7)を上式に代入し, 式(9)を利用すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mnl} + w_{mnl}^2 Q_{mnl}] U_{mnl} &= -r \ddot{u}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mnl} + w_{mnl}^2 Q_{mnl}] V_{mnl} &= -r \ddot{v}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mnl} + w_{mnl}^2 Q_{mnl}] W_{mnl} &= -r \ddot{w}^s \end{aligned} \quad (12)$$

となる. ここで, $U_{pqr}, V_{pqr}, W_{pqr}$ をそれぞれ上式の第 1~3 式の両辺に乘じ, 3 式を加えあわせた後, 物体全体にわたり積分し, 固有関数の直交性を利用すると次式を得る.

$$\ddot{Q}_{mnl}(t) + w_{mnl}^2 Q_{mnl}(t) = -\ddot{f}(t) \cdot Z_{mnl} \quad (13)$$

ここに,

$$Z_{mnl} = \int_V (U^s U_{mnl} + V^s V_{mnl} + W^s W_{mnl}) dV / N_{mnl}^2 \quad (14)$$

であり, U^s, V^s, W^s は $f(t)=1$ とした時の静的解を意味する.

4. 数値計算例

数値計算では, 板厚比 $h/a=0.2$ の正方形板 ($b/a=1$) に, 載荷幅が $x_1/a=0.1, y_1/a=0.1$ の部分等分布荷重 q_0 が時間に関してステップ状に作用する場合を取り扱った. なお, 衝撃を受ける前の矩形板は静止しているものとする. また, 時間については以下に示す無次元時間を使用した.

$$t = \frac{c_1 t}{h}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{C_{22}}{r}} \quad (15)$$

ここで, c_1 は等方面内を進行する縦波速度であり, 材料定数については, 異方性の特性を簡明に検討するためにヤング率比 E'/E のみを変化させ, ポアソン比は $\nu = \nu' = 0.3$ で一定として数値計算を行った. 図 2 および図 3 は板上下面中央 ($x/a=y/b=0.5, z/h=\pm 0.5$) での応力 σ_x, σ_y の応答図である.

三次元弾性論による厚板の結果と Mindlin 平板の結果を比較した場合, 周期に関してはほぼ近い値が得ら

れた. また, 最大応答値に関しては, 両理論の違いにより板上面は多少の違いが生じるが, 板下面にほぼ近い値が得られた. 次に板上下面中央における σ_x を見ると, 最大応答値に関してはヤング率比 E'/E による影響が見られないが, 一方 σ_y では, ヤング率比が小さくなるにつれて, 最大応答値が大きくなっている. これは, ヤング率比が 1 より小さい場合, y 方向の剛性が相対的に大きくなるからだと考えられる.

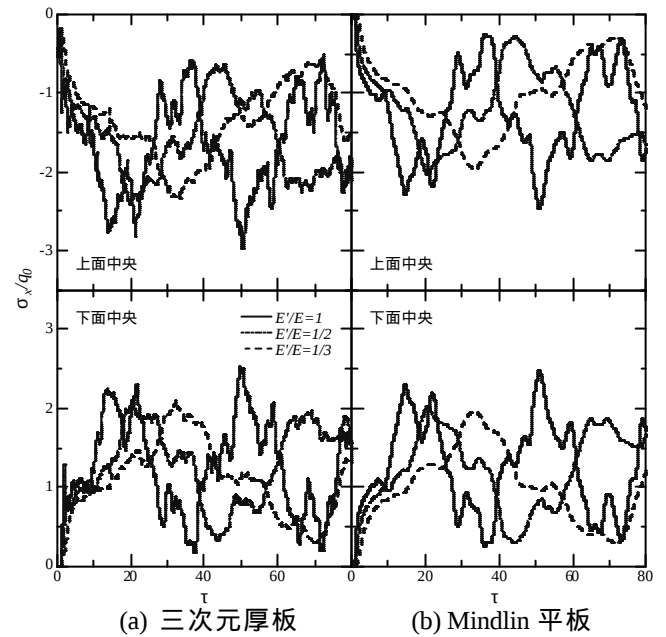


図 2 板下面中央 ($x/a=y/b=0.5, z/h=\pm 0.5$) における σ_x

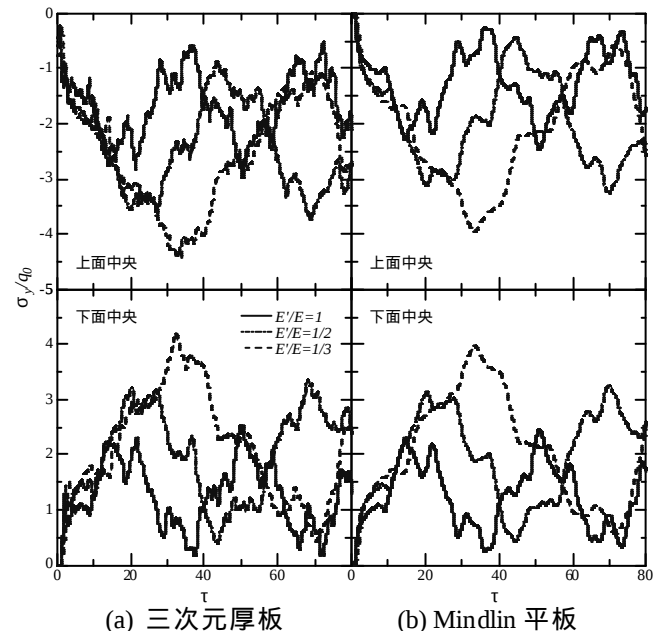


図 3 板下面中央 ($x/a=y/b=0.5, z/h=\pm 0.5$) における σ_y

参考文献

- [1] 小林治俊, 須方大介: 固有関数展開法による横等方性矩形厚板の衝撃応答解析, 応用力学論文集, 土木学会 Vol.3, pp.3-12, 2000.