

京都大学工学部 学生会員 ○津田 尚胤
 京都大学大学院 学生会員 織田澤 利守
 京都大学大学院 フェロー 小林 潔司

1. はじめに

公共事業の効率性やアカウンタビリティの向上を目的とした体系的な公共事業評価システムの構築が進められている。しかし、従来の伝統的な費用便益分析では将来の不確実性を十分に考慮することができない。本研究では、リアルオプション理論を用いて、事業便益リスクと事業の遅延リスクという2種類のリスクを同時に考慮し、評価時点において合理的な判断を可能とする公共事業の事前・再評価モデルを開発する。

2. 基本モデルの定式化

本研究で取り上げる意思決定プロセスの構造を図-1に示す。意思決定者は初期時点 t_0 で事業の事前評価を実施し、観測された事業価値 $\hat{B}$ に基づき「事業を採択するか」、「事業を採択しないか」を決定する。本研究における事業価値とは、その時点で仮に事業が完工し供用が開始されたと想定した場合に、当該時点から将来に渡って発生するであろう期待総便益の当該期時点における現在価値の予測値を意味する。事前評価において事業が採択された場合、事業への投資が開始される。事業の進捗状態を $(N+1)$ 段階の離散的な状態変数 $h_t = j$ ($j = 0, 1, \dots, N$)を用いて記述する。事業の進捗状態 h_t はマルコフ仮定に従うと仮定し、進捗状態 j から k への1ステップの推移確率を p_{jk} と定義する。さらに、推移確率 p_{jk} を (j, k) 要素とする推移確率行列を P で表現する。これにより事業の遅延リスクを表現することが可能となる。任意の時点 t における事業の進捗率 α_t は状態変数 h_t を用いて $\alpha_t = \frac{h_t}{N}$ と表される。本研究において事業の進捗率は、着目している時点までに投資された累積投資額が事業の全投資費用に対して占める割合を用いて定義する。ある評価時点 t から次の評価時点 t' の間に事業の進捗状態が α_t から $\alpha_{t'}$ へ進展した場合、時点 t' において建設投資費用 $C \cdot (\alpha_{t'} - \alpha_t)$ が支払われる。ただし、 C は事業の投資総額を表す。事業開始後、一定期間 τ (年)が経過した時点 $t_1 = t_0 + \tau$ において、事業が完工していない場合、第1回目の再評価が実施される。再評価時点で観測された事業の進捗状態 h_{t_1} と事業価値 $\hat{B}$ に基づいて「事業を継続する」、あるいは「事業を中止する」のいずれかが選択される。事業が完工するまでの間、一定期間 τ 年毎に再評価が実施される。ただし、再評価の実施には評価費用 C_e が必要となる。一方、再評価により事業の中止が決定された場合、事業

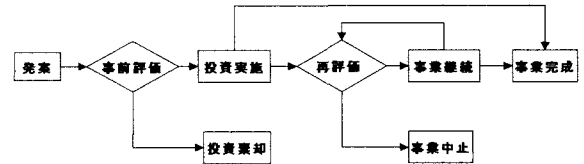


図-1 意思決定プロセス

は廃棄される。その場合、事業の中止には、中止費用 C_a を要する。簡単のために、事業は完工後はじめて便益を発生するものとする。

事業の事前・再評価問題を再帰的に定式化する。時点 t_i において事業を継続し、それ以降最適に意思決定を実施した場合に獲得できる事業の期待純価値の最大値を $\Omega_j(\hat{B})$ と表す。時点 t_i で事業を継続した場合に生じうる事象としては、1) 次の再評価時点 $t_{i+1} = t_i + \tau$ までに事業が完成する、2) 時点 t_{i+1} において、再度事業の再評価が実施される、という2通りが考えられる。まず、1) の場合に着目しよう。時点 t_i からの経過時間を表す変数 s ($1 \leq s \leq \tau$)を導入する。残事業費 $C \cdot (1 - j/N)$ は事業完成時に一括して支払われると仮定する。時点 t'_i で事業が完成した場合に獲得できる事業の追加的純価値は $\eta(B(t'_i)) = B(t'_i) - C \cdot (1 - j/N)$ である。ただし、時点 t_i において事業価値 $B(t'_i)$ (以下、 B と略記する)は確定的に把握することができず、条件つき確率密度関数 $f(B|\hat{B}, s)$ に従って分布することのみが把握できる。時点 t_i に事業の進捗状態 j 、事業価値 $\hat{B}$ が観測された下で、時点 t'_i に事業が完成した場合に獲得できる事業の期待追加的純価値の時点 t'_i における当該期価値は次式で表される。

$$E[\eta(B)|\hat{B}, j, s] = \int_0^\infty \left\{ B - C \left(1 - \frac{j}{N} \right) \right\} f(B|\hat{B}, s) dB \quad (1)$$

次回の再評価時点までに事業が完成して獲得できる期待純価値の時点 t_i における当該期価値 $W_j(\hat{B})$ は、

$$W_j(\hat{B}) = \sum_{s=1}^{\tau} \xi_j(s) E[\eta(B)|\hat{B}, j, s] (1+r)^{-s} \quad (2)$$

となる。ただし、 $\xi_j(s)$ は時点 t_i において事業の進捗状態が j であるときに、時点 $t'_i = t_i + s$ に事業が完成する確率である。また、 r は社会的割引率である。次に、2) の場合をとりあげる。次回の再評価時点 $t_{i+1} = t_i + \tau$ までに事業が完成せずに、進捗状態が $h_{t_{i+1}} = k$ ($j \leq k < N$)となる推移確率は、 τ 年間における進捗状態の推移

確率行列 $\Pi = P^T$ の (j, k) 要素 π_{jk} で表すことができる。再評価時に進捗状態 k 、事業価値が $\hat{B}$ である事業に対して、それ以降最適に意思決定を実施した場合に獲得できる期待純価値の最大値を表す最適値関数を $\Psi_k(\hat{B})$ と表す。時点 t_i から時点 t_{i+1} までの投資に要した費用は一括して時点 t_{i+1} に支払われると仮定する。事業が次の再評価時点までに完成しない場合、時点 t_i で評価した当該事業の期待純価値 $R_j(\hat{B})$ は、

$$R_j(\hat{B}) = \bar{R}_j(\hat{B}) + \lambda_j \left\{ \int_0^\infty \Psi_j(B) f(B|\hat{B}) dB - C_e \right\} \quad (3)$$

$$\bar{R}_j(\hat{B}) = \lambda \sum_{k=j+1}^{N-1} \pi_{jk} \left\{ \int_0^\infty \Psi_k(B) f(B|\hat{B}) dB - C \cdot \frac{k-j}{N} - C_e \right\} \quad (4)$$

と表される。ただし、 $\lambda = (1+r)^{-\tau}$ は割引因子、 $\lambda_j = \lambda \pi_{jj}$ である。したがって、時点 t_i において、事業を継続した場合に獲得できる期待純価値の最大値 $\Omega_j(\hat{B})$ は

$$\Omega_j(\hat{B}) = W_j(\hat{B}) + R_j(\hat{B}) \quad (5)$$

と表される。一方、時点 t_i で事業を中止した場合、中止費用 C_a が必要となる。以上より、再評価時点 t_i で、事業の進捗状態 j 、事業価値 $\hat{B} \in (0, \infty)$ が観測された時、この時点における事業の最適値関数 $\Psi_j(\hat{B})$ を再帰的に定義すれば

$$\Psi_j(\hat{B}) = \max \left\{ \Omega_j(\hat{B}), -C_a \right\} \quad (6)$$

を得る。

事前評価時点 t_0 では、事業は進捗しておらず、 $h_{t_0} = 0$ が成立する。式(5)より、採択した場合に獲得できる事業の期待純価値の最大値は、

$$\Omega_0(\hat{B}) = W_0(\hat{B}) + R_0(\hat{B}) \quad (7)$$

と表される。事前評価時点における最適値関数 $\Phi(\hat{B})$ は、

$$\Phi(\hat{B}) = \max \{ \Omega_0(\hat{B}), 0 \} \quad (8)$$

と表される。

3. 最適化条件

式(6)において、事業価値 $\hat{B}$ が十分に大きく、事業を継続することが最適であれば $\Psi_j(\hat{B}) = \Omega_j(\hat{B})$ が成立する。一方、事業価値が小さい場合は、事業を中止することが最適選択となり $\Psi_j(\hat{B}) = -C_a$ が成立する。いま、進捗状態が j の時に、事業を継続しても中止しても、互いに無差別となるような臨界事業価値 B_j^* が存在し、

$$\Psi_j(\hat{B}) = \begin{cases} \Omega_j(\hat{B}) & \hat{B} \geq B_j^* \text{ の時} \\ -C_a & \hat{B} < B_j^* \text{ の時} \end{cases} \quad (9)$$

が成立すると考えよう。進捗状態 j のもとで再評価が行われた時に、事業が継続される事業価値 $\hat{B}$ の集合を $C_j = \{ \hat{B} | B_j^* \leq \hat{B} \}$ と定義する。この時、任意の $\hat{B} \in C_j$ に対して

$$\Psi_j(\hat{B}) = \Omega_j(\hat{B}) \quad (10)$$

が成立する。式(5)より、

$$\Psi_j(\hat{B}) = \Xi_j(\hat{B}) + \lambda_j \int_{B_j^*}^\infty \Psi_j(B) H(B, \hat{B}) dB \quad (11)$$

$$\Xi_j(\hat{B}) = W_j(\hat{B}) + \bar{R}_j(\hat{B}) - \lambda_j C_e - \lambda_j C_a \int_0^{B_j^*} f(B|\hat{B}) dB \quad (12)$$

$$H(B, \hat{B}) = f(B|\hat{B}) \quad (13)$$

が成立する。積分方程式(11)の解を $\Psi_j^*(B)$ と表そう。この時、最適値関数 $\Psi_j^*(B)$ に関して境界条件

$$\Psi_j^*(B_j^*) = -C_a \quad (14)$$

が成立する。再評価問題は、各進捗状態 j に関して式(11)と境界条件(14)を満足する未知関数 $\Psi_j^*(B)$ と臨界事業価値 B_j^* を求める問題に帰着する。ただし、式(11)を構成する項 $\bar{R}_j(\hat{B})$ に進捗状態 $k = j+1, \dots, N-1$ に関する最適値関数 $\Psi_k(B)$ が含まれる。このように再評価問題は複雑な入れ子構造をしている。なお、モデルの解法については、紙面の都合上割愛する。

4. 拡張モデル

再評価時点における意思決定問題において、「事業を継続する」、「事業を中止する」という選択肢の他に「事業を休止する」という選択肢を新しく加えた拡張モデルを考える。事業の休止が決定された場合、将来時点で事業を再開するオプション価値を獲得できるが、休止期間中の維持費用として総額 C_m を支払う必要がある。拡張モデルにおける最適値関数 $\tilde{\Psi}(\hat{B})$ も基本モデルと同様、再帰的に定義できる。

5. 数値計算事例

数値計算では、事業価値が幾何ブラウン運動に従うと仮定した上で、基本モデルと拡張モデルの最適値関数値の比較、事業の進捗状態と臨界事業価値の関係、事業便益リスクと最適値関数値の関係について分析した。

6. おわりに

本研究では、意思決定者が事業価値と進捗率という2種類の状態変数に関する情報に基づいて、事前評価時点における事業の採択、再評価時点における事業の継続・中止を合理的に決定できるような事前・再評価モデルを提案した。その際、事業便益リスクと遅延リスクを同時に考慮した。さらに、再評価時点における事業休止オプションを追加した事前・再評価モデルを定式化し、休止オプションの価値を計測する方法を提案した。さらに、数値計算事例により、事業をとりまくリスクが事業の採択基準、および再評価における事業継続基準に及ぼす影響や休止オプションの経済価値を分析した。なお、拡張モデルの詳細と分析結果については紙面の都合上割愛したが、講演の際に解説を加えることとする。