

神戸大学工学部建設学科

学生員 ○川江 友勝

神戸大学大学院自然科学研究科

正会員 中山 昭彦

1. はじめに

工学的な乱流現象に対して差分法を用いた数値解析の方法のひとつとして LES がある。これは Navier-Stokes 方程式（以下 N-S 方程式）を格子平均を用いてモデル化するもので、同じくモデル化を用いる RANS よりも大小様々な渦を表現できるという点で普遍性の高いモデルとして期待されている。また計算に用いる構造格子として直交格子と境界適合格子があるが、境界適合格子の方が支配方程式は複雑になり計算に時間がかかるが、境界を表現するという点では直交格子では少ない格子点数では形状を正確に扱いにくく境界適合格子のほうが適しているといえる。境界適合座標系のうちシグマ座標は鉛直上向き方向の座標軸を持ったもので、そのことで方程式をやや簡略化することができる。

2. シグマ座標における定式化

計算に用いた LES 方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

ここで $\bar{u}_i$, $\bar{p}$ 速度, 圧力を空気密度で叙した値の空間平均で, 平均化された N-S 方程式の右边第3項は SGS 応力項である。この項を次のようにモデル化する。

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = \frac{2}{3} k_{SGS} - \nu_G \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad k_{SGS} = \frac{\nu_G^2}{(C_K \Delta)^2}, \quad \nu_G = (C_S \Delta)^2 \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

ここで k_{SGS} は SGS 応力項, ν_G は渦動粘性係数, C_K ならびに C_S はモデル定数で $C_K = 0.094$, $C_S = 0.10$

とした。境界適合格子を用いた計算では、物理空間であるデカルト座標で書かれた基礎式を、計算空間である境界適合座標に変換して差分計算を行う¹⁾。デカルト座標を (x, y, z) , 境界適合座標を (ξ, η, ζ) とし座標変換を行うと物理量の一階微分は次のようになる。ここで x 軸, ξ 軸をともに鉛直上向き方向にとり, x 軸と η 軸, ζ 軸, y 軸と ξ 軸, ζ 軸がそれぞれ直交するようにと

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_\xi} & 0 & \frac{-z_\xi}{x_\xi z_\zeta} \\ 0 & \frac{1}{y_\eta} & \frac{-z_\eta}{y_\eta z_\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。座標変換した連続の式と x 方向の N-S 方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{x_\xi} \bar{u}_\xi - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\zeta} \bar{u}_\zeta + \frac{1}{y_\eta} \bar{v}_\eta - \frac{z_\eta}{y_\eta z_\zeta} \bar{v}_\zeta + \frac{1}{z_\zeta} \bar{w}_\zeta = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \left(\frac{1}{x_\xi} \bar{u}_\xi - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\xi} \bar{u}_z \right) + \bar{v} \left(\frac{1}{y_\eta} \bar{u}_\eta - \frac{z_\eta}{y_\eta z_\xi} \bar{u}_z \right) + \bar{w} \left(\frac{1}{z_\xi} \bar{u}_z \right) \\
&= \left(\frac{1}{x_\xi} \bar{p}_\xi - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\xi} \bar{p}_z \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x_\xi} k_{SGS\xi} - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\xi} k_{SGSz} \right) \\
&+ (v + v_G) \left\{ \left[\frac{1}{x_\xi^2} \bar{u}_{\xi\xi} - 2 \frac{z_\xi}{x_\xi^2 z_\xi} \bar{u}_{\xi z} + \frac{z_\xi^2}{x_\xi^2 z_\xi^2} \bar{u}_{zz} - \frac{x_\xi z_\xi}{x_\xi^2} \bar{u}_{\xi z} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{x_\xi^3} \left(-x_\xi z_\xi z_\xi^2 + x_\xi z_\xi z_\xi^2 + 2x_\xi z_\xi z_\xi z_\xi - x_\xi z_\xi^2 z_\xi z_\xi \right) \bar{u}_\xi \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{1}{y_\eta^2} \bar{u}_{\eta\eta} - 2 \frac{z_\eta}{y_\eta^2 z_\xi} \bar{u}_{\eta z} + \frac{z_\eta^2}{y_\eta^2 z_\xi^2} \bar{u}_{zz} - \frac{y_\eta z_\xi}{y_\eta^2} \bar{u}_{\eta z} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{y_\eta^3} \left(-y_\eta z_\eta z_\xi^2 + y_\eta z_\eta z_\xi^2 + 2y_\eta z_\eta z_\xi z_\xi - y_\eta z_\eta^2 z_\xi z_\xi \right) \bar{u}_\eta \right] \right\} + \left\{ \frac{1}{z_\xi^2} \bar{u}_{zz} - \frac{z_\xi z_\xi}{z_\xi^2} \bar{u}_z \right\} \\
&+ 2 \left(\frac{1}{x_\xi} v_{G\xi} - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\xi} v_{Gz} \right) \left(\frac{1}{x_\xi} \bar{u}_\xi - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\xi} \bar{u}_z \right) + \left(\frac{1}{y_\eta} v_{G\eta} - \frac{z_\eta}{y_\eta z_\xi} v_{Gz} \right) \left(\frac{1}{y_\eta} \bar{u}_\eta - \frac{z_\eta}{y_\eta z_\xi} \bar{u}_z + \frac{1}{x_\xi} \bar{v}_\xi - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\xi} \bar{v}_z \right) \\
&+ \frac{1}{z_\xi} v_{Gz} \left(\frac{1}{x_\xi} \bar{u}_\xi + \frac{1}{x_\xi} \bar{w}_\xi - \frac{z_\xi}{x_\xi z_\xi} \bar{w}_z \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

3. 解析手法

差分法として2次中心差分、時間進行法に2次精度 Adams-Bashforth 法、圧力解法に MAC 法を用いた。変数配置はレギュラー配置とした。計算形状および計算格子を図1に示す。地形の式は

$$\frac{z}{H} = \frac{1}{1 + (x/n)^4} \tag{6}$$

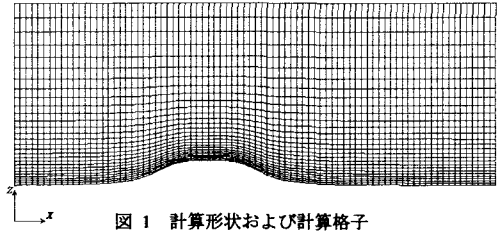


図1 計算形状および計算格子

で与えられる。 $n=2.3$ とし最大傾斜角を25度とした。 H

は丘の高さである。計算領域として x, y, z 方向それぞれ $20H \times 3H \times 7H$ とし、格子数は $81 \times 7 \times 27$ としている。境界条件として流入面に対数則を流出面に放射条件をあたえ、上端面、両端面をすべり、地表面すべりなしとした。

4. 結果と考察

図2はレイノルズ数を2500、時間刻みを0.001とし時間25における速度ベクトル図である。渦の発生と剥離の様子が表現されている。しかし渦の発生は周期的なものとはならず時間の進行とともに計算は発散した。差分スキームの選び方、計算領域、最小格子幅などを改善する必要があると考えられる。また図3より圧力が振動しているのがわかる。これは変数配置としてレギュラー配置を用いたためと考えられ、シグマ座標であることを加味した変数配置を考慮しなければならない。

参考文献

1) 岸 修士郎：複雑地形上気流のシミュレーション，修士論文，神戸大学大学院自然科学研究科博士課程前期課程建設学専攻，2002，2。

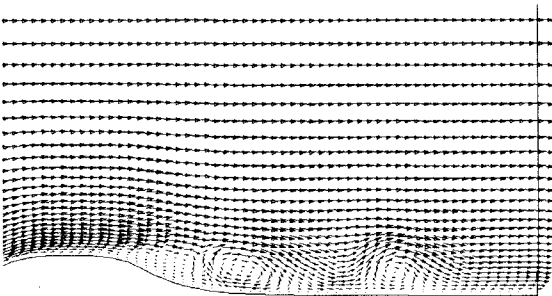


図2 速度ベクトル図 (t=25)

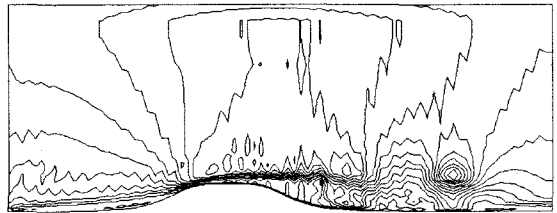


図3 圧力分布図 (t=25)