第II部門　**フラックス制御法を用いる高次精度流体計算法**

京都大学工学部地球工学科　学生員　○藤田 学
京都大学大学院工学研究科　正会員　牛島 省
京都大学大学院工学研究科　フェロー　禰津 家久

1．はじめに

移流方程式や，流体の運動方程式，すなわち Navier-Stokes 式の非線形項に対する解法には，(1) 計算精度が高いこと (数値粘性をできるだけ小さくすること)，(2) 数値振動を起こさないこと，(3) 保存性を満足すること，という 3 つの条件が求められる．保存性を満足する数値振動抑制法として従来，QUICK スキームによる計算で数値振動が生じた場合に，1 次風上型スキームに切り替える QUICK-FRAM [1)]，minmod 関数などの制限関数を利用するなどの方法により TVD 条件を満足させるスキームとして，ENO スキーム [2)]，MUSCL [3),4)] などが提案されている．本研究では，これら 3 つの条件を考慮した既往の解法とは異なる，5 次精度相当の解法を提案する．

2．FVM-QSI スキーム

保存性を満足するスキームを構成するためには，有限体積法に基づく離散化が有効である．この離散化法を用いる場合には，セル境界における変数値をいかに精度良く求めるかが計算精度を高めるために重要となる．本研究では，有限体積法により離散化された移流方程式に対して，セル境界における変数値を 5 次スプライン内挿により求めて，セル境界のフラックスを評価する 5 次精度相当の解法 (FVM-QSI スキーム) を提案した．

3．フラックス制御法

FVM-QSI スキームなどの高次内挿を利用する計算スキームは，一般に TVD 条件を満足しないため，数値振動を伴う．本研究では，数値振動を抑制するため，線形化された移流方程式からオーバーシュートあるいはアンダーシュートの大きさを算出し，これをフラックスとして隣接する計算するに配分することにより，数値振動を防止する手法を提案した．この解法では隣接するセルに影響が生じるので，反復計算を行うことにより，数値振動を含まない数値解を得る．反復計算の k ステップの数値振動量 dc^k は次式から求められる．

$$dc_{ij} = \max\{c^*_{ij} - c_{\max},\ 0\} \geq 0$$

$$dc_{ij} = \min\{c^*_{ij} - c_{\min},\ 0\} \leq 0$$

ここにおいて $c_{\max}$ と $c_{\min}$ は，風上セルより評価したスカラーの値である．これを用いフラックス f，g は次式から求められる．

$$f^{k+1}_{ij} = f^k_{ij} - \frac{1}{4c_x}(dc^k_{i+1j} - dc^k_{ij})$$
$$g^{k+1}_{ij} = g^k_{ij} - \frac{1}{4c_y}(dc^k_{ij+1} - dc^k_{ij})$$

ここでセル間隔 Δx，Δy，時間増分を Δt とするとき，$c_x = \Delta t/\Delta x \quad c_y = \Delta t/\Delta y$ で与えられる．以上のように，本研究で提案する，フラックス制御法を用いる FVM-QSI スキームでは，有限体積法に基づくため保存性を満足し，フラックス制御により数値振動をしきい値以下に抑制することが可能で，しかも計算精度は 5 次精度相当となる．

4．数値計算例

図 1 は，2 次元剛体回転場におけるスカラーの移流計算を行った計算結果である．初期のスカラーの最大値は 1.0 であり，理論的にはこの値は移流過程では変化しない．したがって，計算結果が 1.0 に近いほど，計算精度が高いことになる．この結果では，フラックス制御法（図中では DC FVM-QSI) の結果が，5 次 TVD スキーム，3 次 TVD-MUSCL スキームと比較して，最も精度が高い．また，3 次精度の QUICK スキームに本研究のフラックス制御法を用いると，QUICK-FRAM より精度が向上し，5 次 TVD スキームより高精度となる．図 2 は，Navier-Stokes 式の移流項にフラックス制御法と 5 次 TVD スキームを用いた計算結果を，Ghia の結果と比較したものである．フラックス制御法では 15 × 15，5 次 TVD スキームでは 18 × 18 の等間隔セルを用いた．フラックス制御法の結果が，5 次 TVD スキームと比べ粗い格子間隔にもかかわらず精度が高いことがわかる．またこの場合の計算速度は，フラックス制御法が約 1.2 倍程速くなっている．図 3 は，1 次元移流計算において，代表的な非保存形スキームの CIP 法 [5)] との比較を行った結果である．CIP 法により得られたスカラーの分布は，非対称性が著しく，極大値がオーバシュートしており，また下流側に大きなアンダーシュー

Manabu Fujita, Satoru USHIJIMA, Iehisa NEZU

トを伴う．この数値振動を抑制するためにMMTフィルタを用いると，スカラーのピーク値が低減する．さらに，MMTフィルタを用いた場合には，計算領域内のスカラーの総和が最大約10%減少し，保存性が大きく損なわれる．

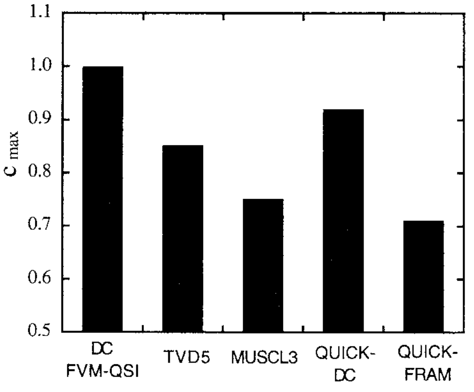

図 1　2次元移流計算における c の最大値

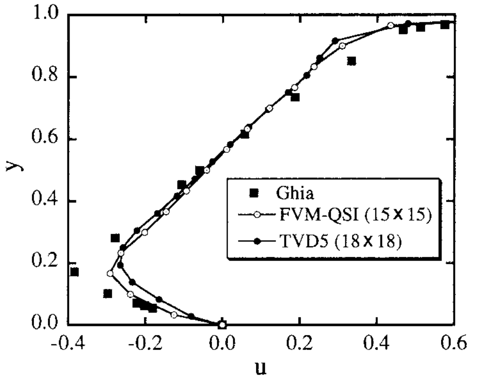

図 2　FVM-QSI(DC method) と 5 次 TVD の比較　(Re=1,000)

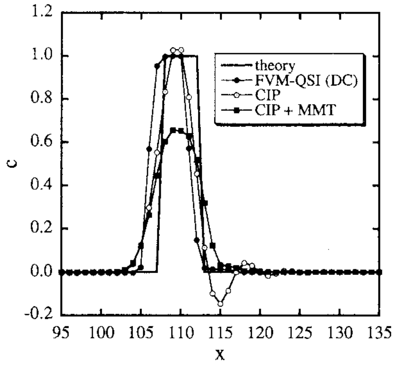

図 3　CIP と FVM-QSI (DC 法) の計算結果の比較

5．おわりに

本報告では，計算セル境界のフラックスを5次スプライン関数を用いて空間内挿するFVM-QSIスキームを示した．次にFVM-QSIスキームのようにTVD条件を満たさない高次精度のスキームで問題となる数値振動をフラックス制御により抑制する手法を検討した．その適用性を調べた結果，提案された解法は数値振動の回避，保存性，高い計算精度の維持といったことに非常に効果的で，計算時間の点においても有用であることが示された．

参考文献

1) 前川勇. 多次元伝熱流動計算における数値拡散, (II). 日本原子力学会誌, Vol. 29, No. 9, pp. 823–833, 1987.

2) A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. *J. Comput. Phys.*, Vol. 71, pp. 231–303, 1987.

3) B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, pp. 101–136, 1979.

4) S. Yamamoto and H. Daiguji. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computers Fluids*, Vol. 22, No. 2/3, pp. 259–270, 1993.

5) T. Yabe and T. Aoki. A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation i. One-dimensional solver. *Computer Physics Communications*, Vol. 66, pp. 219–232, 1991.