流れの有限要素法数値解析における自由表面追跡手法の改良

京都大学工学部　学生員　○池田　正博
京都大学工学研究科　正会員　沖　和哉
京都大学工学研究科　フェロー　酒井　哲郎
京都大学工学部　学生員　木村　章

1．はじめに　自由表面を有する流れの現象を把握することは，工学上重要な問題である．このような問題を検討する方法として,様々な数値シミュレーションが考案されている.その代表的な手法として,VOF法,マーカー粒子法などが挙げられるが，解析に時間がかかる事や，自由表面形状が複雑に変形する場合への適応性に問題があるなどいずれの手法も一長一短がある．本研究では，非構造格子を用いて３次元複雑形状が近似でき，流出・流入など各種の境界条件が容易に処理できるといった特徴を持つ有限要素法にVOF法を適用し，さらにKim and Lee(2003)の要素内自由表面勾配を考慮するモデルを採り入れ，流れの自由表面解析モデルを構築した．

2．数値解析の手法

（１）基礎方程式

非圧縮流体の連続式とNavier-Stokesの運動方程式はそれぞれ以下のようにあらわされる．

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla \mathbf{p} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \qquad \mathbf{F} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{g}) \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{u}$は流速，ρは密度，$\mathbf{p}$は圧力，μは粘性係数を表す．式(1)(2)を解くことにより，計算領域内の速度および圧力分布を求めることができる．また，自由表面は，次の移流方程式によって計算される．

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \tag{3}$$

ここで，fはVOF関数を表す．液相のみの要素では$f = 1.0$，気相のみの要素では$f = 0$，気相と液相が混在する要素では$0 < f < 1.0$となり，その要素内に自由表面が存在することになる．また，各要素の密度および粘性係数は次のように表される．

$$\rho = \rho_l f + \rho_g (1 - f) \tag{4}$$

$$\mu = \mu_l f + \mu_g (1 - f) \tag{5}$$

ここで，ρ_l, μ_lは液体の密度，粘性係数を，ρ_g, μ_gは気体の密度，粘性係数を表す．

（２）ウエットアウトフラクション

本研究では，Kim and Lee(2003)に従って，式(3)を要素ごとに積分し，陽的解法により処理を行った．すると，式(6)のように変形される．

$$f_i^{new} = f_i^{old} + \frac{\Delta t}{V_i}\left[-\sum_j f_{\Gamma_j} \int_{A_j} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA \right] \tag{6}$$

ここで，添え字i，jはそれぞれ要素と面の番号，f_i^{new}とf_i^{old}はi番目の要素の新しい時間ステップと古い時間ステップにおけるfの値，Δtは時間増分，V_iはi番目の要素の体積，A_jはj番目の面(以後Γ_jと表す)の面積，$\mathbf{u}$と$\mathbf{n}$はΓ_jの速度ベクトルと外向きの単位法線ベクトル(図１), $f_{\Gamma j}$は要素境界Γ_jのうちどのぐらいの範囲を流体が占めているかを表し，これをウエットアウトフラクションとよぶ．要素内の移流を精度良く計算するためには，$f_{\Gamma j}$をうまく決定する必要がある．

Kazuya OKI , Tetsuo SAKAI , Akira KIMURA and Masahiro IKEDA

（3）自由表面形状と方向ベクトル

要素内の自由表面を調べるために，近辺の要素の状況を考慮に入れなければならない．要素内では自由表面は平面であると仮定し，方向ベクトルは自由表面に対して垂直であるとして，次式のように定義する．

$$\mathbf{r}=\frac{\sum_j\left(f_{ij}\cdot V_{ij}\right)a_j\mathbf{n}}{\left|\sum_j\left(f_{ij}\cdot V_{ij}\right)a_j\mathbf{n}\right|} \tag{7}$$

ここで，f_{ij}とV_{ij}はそれぞれΓ_jに隣接する要素の流体ボリュームフラックスと体積を，a_jはi番目の要素全体の表面積に対するΓ_jの面積比を表す．f_iと$\mathbf{r}$が決まれば一意的に$f_{\Gamma j}$を求めることができる．

（4）Kim and Lee(2003)の手法の適応に対する問題点

Kim and Lee(2003)の手法では，要素境界と自由表面が一致する状況で問題が発生する場合がある．着目する要素のfの値からf_Γを求めるので，例えば図２の要素IIでは４つの面共に$f_\Gamma=0$となる．その状況において，式(6)より次のステップでfの値は変化しない．そこで本研究では，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$が負の場合，$\Gamma_j$を共有する隣の要素(図では要素Ｉ)の$f_{\Gamma j}$を求め，それをその面におけるウエットアウトフラクションとした．

３．数値解析例　本手法の妥当性を検討するために，３次元ダムブレイク問題の計算を行った．図３に示すように，0.8m×0.8m×0.6m の解析領域に，初期条件として，0.4m×0.4m×0.4m の水柱を与える．領域外は固定壁とする．要素分割は 0.01m 幅とし，400221 節点，38400 要素の解析メッシュを用いた．時間増分は$\Delta t=1.0\times10^{-4}$sec とした．この結果を図４に示す．この結果より，水柱が崩れる様子が再現されていることが確認できる．

４．結論　本研究では非圧縮 Navier-Stokes 方程式に基づく有限要素法に VOF 関数と要素内勾配を考慮するモデルを採り入れ，自由表面を有する流れ場の計算を行った．数値解析より，概ね妥当な結果が得られた．しかし，定性的な再現性の確認にとどまっているので，今後は定量的な検証を行うとともに，波浪場や大規模問題に対しても適応できるよう改良したい．また，要素数が増えると，計算に時間がかかってしまうため，並列化を進めたい．

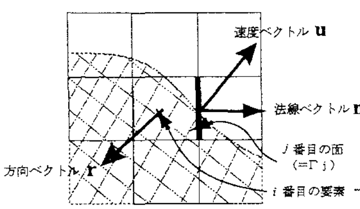

図１：諸変数の定義

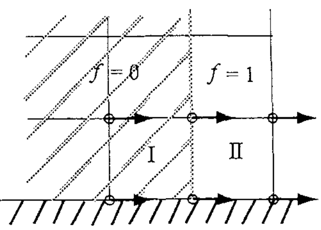

図２：Kim and Lee (2003) の手法の適応に対する問題点

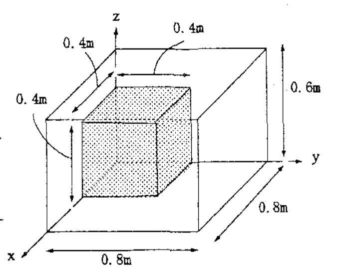

図３：３次元ダムブレイク問題

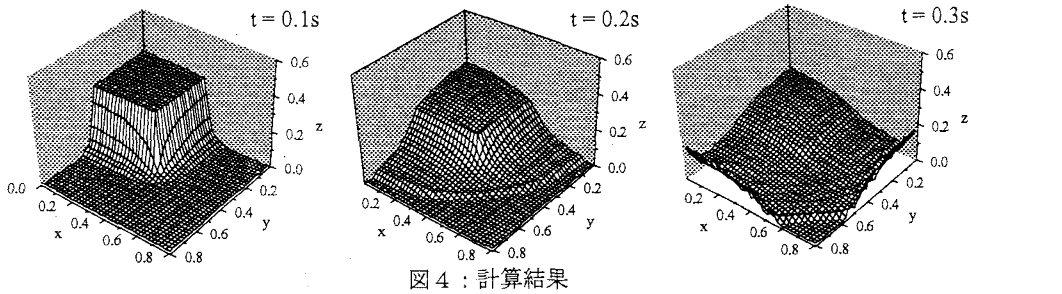

図４：計算結果

参考文献

矢川元基・奥田洋司・中林 靖著：「有限要素法流れの解析」,1998

Min Soo Kim and Woo II Lee：A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface. Part I：New free surface-tracking algorithm and its verification, 2003.