リアルオプション理論を用いたプロジェクトの事前・再評価に関する研究

京都大学工学部　学生会員　○松田　明広
京都大学大学院　学生会員　織田澤　利守
京都大学大学院　フェロー　小林　潔司

1. はじめに

公共事業の効率性やアカウンタビリティの向上を目的とした体系的な公共事業評価システムの構築が進められている．従来の事業評価に用いられる伝統的な費用便益分析では，「不可逆性の無視」および「now-or-never原則」という強い仮定を有するため，事前・再評価間の関連性を適切に考慮することができない．本研究では評価費用を考慮したプロジェクトの事前・再評価モデルについて，リアルオプション理論を用いることで，最適なプロジェクト実施および破棄のタイミングを決定できるような評価ルールを求める方法を提案する．

2. モデルの定式化

本モデルの構造を（図-1）に示す．本モデルでは，公共プロジェクトの評価問題を総投資費用C，費用配分費$\kappa(0 \leq \kappa \leq 1)$とした際の初期投資（費用$C_1 = \kappa C$）および追加的投資（費用$C_2 = (1-\kappa)C$）の２段階投資に関する意思決定問題として定式化する．計画視野が無限期間にわたる動的最適化問題を考える．意思決定主体は初期時点より一定期間τ毎にプロジェクトの事前評価を行い，採択，破棄，留保のいずれかを選択する．なお，一般に社会資本整備では，整備した施設を転売・転用することにより事業に投下した費用を回収して整備前の状態にすることはできず，投資済みの費用は事後的に回収できずに無駄な投資となる．また，第1段階投資終了後一定の期間τが経過した時点で，再評価により第２段階の投資が実施された場合，投資直後よりプロジェクト価値が発生する．プロジェクト価値は，仮にその時点にプロジェクトが完成した場合に当該時点から将来にわたって発生する期待総便益の当該期価値を意味する．プロジェクト価値にはリスクが存在し，時点によって変動する．任意の時点t_iでプロジェクト価値$\hat{B}_i$が観測された場合，次期評価時点t_{i+1}の観測値B_{i+1}は条件付き確率密度関数$f(B_{i+1} \mid \hat{B}_i)$に従って分布する．さらに，毎回の事前・再評価にそれぞれ費用δ_1, δ_2が必要とされ，再評価時点におけるプロジェクトの中止費用としてはSが必要となる．簡単のために，$\delta_1, \delta_2, S, C, \kappa$は全期間を通じて一定とする．

いま，時点t_iの事前評価においてプロジェクトが採択され，時点$t_k = t_i + \tau$においてプロジェクトの再評価が行われる問題に注目する．さらに，プロジェクトの再評価により，プロジェクト価値$\hat{B}_k$が観測されたとする．再評価問題は，再評価時点t_kにおけるプロジェクト価値の観測値$\hat{B}_k$のもとでプロジェクトの継続，中止あるいは意思決定の留保という決定を下す問題として定式化できる．第２段階の投資によりプロジェクトが完成した場合に獲得できる期待純価値は$P(\hat{B}_k) = \hat{B}_k - C_2$と表される．再評価時点においてプロジェクトの意思決定を見送った場合，再評価時点t_kにおいてプロジェクトを採択しないことにより獲得できる期待純価値の当該期価値$G_{k+1}(\hat{B}_k)$はρを社会的割引率として

$$G_{k+1}(\hat{B}_k) = E[\Phi(B_{k+1})]\exp(-\rho\tau)$$
$$= \left\{\int_0^\infty \Phi(B_{k+1})f(B_{k+1}|\hat{B}_k)dB_{k+1}\right\}\exp(-\rho\tau) \quad (1)$$

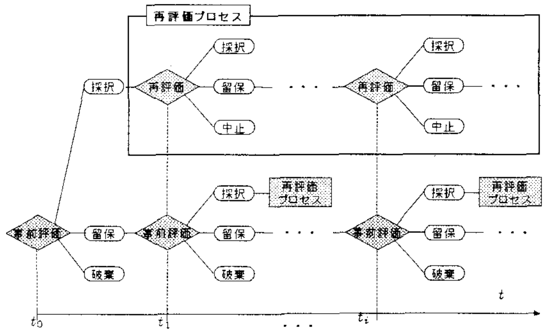
と表される．よって，再評価問題は時点t_k以降，最適なプロジェクト選択を実施した場合に定義できる関数を最適値関数$\Phi(B_k)$として

$$\Phi(\hat{B}_k) = \max\left\{P(\hat{B}_k), -S, \{G_{k+1}(\hat{B}_k) - \delta_2\}\exp(-\rho\tau)\right\} \quad (2)$$

と再帰的に定義される．式 (2) の右辺はそれぞれプロジェクトを継続，中止，留保により獲得される期待純価値の当該期価値を表す．意思決定を留保したとき，次回には再評価費用δ_2が必要となる．意思決定主体は，３つのうち期待準価値の当該期価値が最大となる選択肢を選択する．いま，ある臨界的な$\overline{B}^*, \underline{B}^*$ $(\overline{B}^* > \underline{B}^*)$が存在し，意思決定が留保されるようなプロジェクト価値を示す継続集合$\mathcal{D}$を$\mathcal{D} = \{B_k | \overline{B}^* \geq \hat{B}_k \geq \underline{B}^*\}$と定義する．いま，$\mathcal{D} \neq \phi$と仮定する．この時，任意の$\hat{B}_k \in \mathcal{D}$に対して，

$$\Phi(\hat{B}_k) = \{G_{k+1}(\hat{B}_k) - \delta_2\}\exp(-\rho\tau) \quad (3)$$

が成立する．最適値関数$\Phi(\hat{B}_k)$の値はプロジェクト価値$B = \hat{B}_k$の値のみに依存しているため，下付添え字kを



図－１　プロジェクト評価の構造

省略すると，式(3)より，継続集合$\mathcal{D}$内において

$$\Phi(\hat{B}) = \Theta(\hat{B}) + \int_{\underline{B}^*}^{\overline{B}^*} \Phi(B)K(B,\hat{B})dB \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\Theta(\hat{B}) &= \left\{\int_0^{\underline{B}^*} -Sf(B|\hat{B})dB \right.\\ &\left. + \int_{\overline{B}^*}^{\infty} P(B)f(B|\hat{B})dB - \delta_2\right\}\exp(-\rho\tau)\end{aligned}$$

が成立する．但し，

$$K(B,\hat{B}) = f(B|\hat{B})\exp(-\rho\tau) \tag{5}$$

である．式(4)は未知関数$\Phi(\hat{B})$に関する第２種フレドホルム型積分方程式となっている．積分方程式の解を$\Phi^*(\hat{B})$と表そう．最適値関数$\Phi^*(\hat{B})$に対して境界条件

$$\Phi^*(\overline{B}^*) = P(\overline{B}^*), \Phi^*(\underline{B}^*) = -S \tag{6}$$

が成立する．再評価問題は積分方程式(4)と境界条件(6)を満足するような未知関数$\Phi^*(\hat{B})$と臨界的プロジェクト価値$\overline{B}^*$,$\underline{B}^*$を求める問題となる．

事前評価問題についても同様に，$i(i = 0,1,2,...)$番目の事前評価の見直しを行う時点$t_i = t_0 + i\tau$に着目する．時点t_iにおいてプロジェクトを採択し，第１段階の投資を実施した場合に獲得できるプロジェクトの期待純価値の当該期価値$Q(\hat{B}_i)$は

$$\begin{aligned}Q(\hat{B}_i) &= \{E[\Phi(B_{i+1})]\exp(-\rho\tau) - \delta_2\}\exp(-\rho\tau)\\ &= \left\{G_{i+1}(\hat{B}_i) - \delta_2\right\}\exp(-\rho\tau) - C_1 \end{aligned}\tag{7}$$

と表される．また，時点t_iでプロジェクト価値$\hat{B}_i$が観測され，時点t_i以降最適なプロジェクト投資を実施したことによって得られる最適プロジェクト期待純価値を$\Psi(\hat{B}_i)$とすると，時点t_iで意思決定を留保したことにより獲得できる期待純価値$H_{i+1}(\hat{B}_i)$は

$$\begin{aligned}H_{i+1}(\hat{B}_i) &= E[\Psi(B_{i+1})|\hat{B}_i]\exp(-\rho\tau)\\ &= \left\{\int_0^{\infty}\Psi(B_{i+1})f(B_{i+1}|\hat{B}_i)dB_i\right\}\exp(-\rho\tau)\end{aligned}\tag{8}$$

と表される．以上より，事前評価問題は

$$\Psi(\hat{B}_i) = \max\left\{Q(\hat{B}_i), 0, \{H_{i+1}(\hat{B}_i) - \delta_1\}\exp(-\rho\tau)\right\} \tag{9}$$

と再帰的に定義される．式 (2) の右辺はそれぞれプロジェクトを採択，破棄，留保により獲得される期待純価値の当該期価値を表す．ここで，式(9)において，ある臨界的な$\underline{B}^{**}$,$\overline{B}^{**}$が存在し，継続集合$\mathcal{C}$を$\mathcal{C} = \{\hat{B}_i|\overline{B}^{**} \geq \hat{B}_i \geq \underline{B}^{**}\}$と定義すると，事前評価問題は境界条件

$$\Psi^*(\overline{B}^{**}) = Q(\overline{B}^{**}), \Psi^*(\underline{B}^{**}) = 0 \tag{10}$$

を満足するような第2種フレドホルム積分方程式の解$\Psi(\hat{B})$と臨界的プロジェクト価値$\overline{B}^{**}$,$\underline{B}^{**}$を求める問題として定式化できる．

3. 事前・再評価モデルの解法

前節で提案した事前・再評価モデルでは，事前評価問題の境界条件に再評価プロセスの最適値関数が用いられるという入れ子構造をしている．そのため，事前・再評価モデルの解は，１）再評価問題の最適解（最適値関数）を求め，２）それを用いて事前問題の最適解を求めるという２段階のステップを通して求められる．そこで，再評価問題に着目して未知関数の解法を示す．再評価問題の式 (4) (6) において，$\underline{B}^*,\overline{B}^*$が既知であると仮定する．さらに，

$$\begin{aligned}K_1(B,\hat{B}) &= K(B,\hat{B})\\ &\cdots\\ K_n(B,\hat{B}) &= \int_{\underline{B}^*}^{\overline{B}^*} K_{n-1}(\xi,\hat{B})K(B,\xi)d\xi\\ \Gamma(B,\hat{B}) &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n(B,\hat{B})\end{aligned}\tag{11}$$

とすれば，積分方程式(4) の解は，

$$\Phi^*(\hat{B}:\underline{B}^*,\overline{B}^*) = \Theta(\hat{B}) + \int_{\underline{B}^*}^{\overline{B}^*}\Gamma(B,\hat{B})\Theta(B)dB \tag{12}$$

と表される．ここに，積分区間$\underline{B}^*,\overline{B}^*$が変化すれば最適値関数$\Phi^*(\hat{B}:\underline{B}^*,\overline{B}^*)$の関数形が変化することに留意しよう．すなわち，最適値関数は$\underline{B}^*,\overline{B}^*$をパラメータとする汎関数となっており，それを陽的な関数形として表現することは不可能である．このことに留意すれば，再評価問題は

$$\begin{aligned}\Phi^*(\hat{B}:\underline{B}^*,\overline{B}^*) &= \Theta(\hat{B}) + \int_{\underline{B}^*}^{\overline{B}^*}\Gamma(B,\hat{B})\Theta(B)dB\\ \Phi^*(\overline{B}^*:\underline{B}^*,\overline{B}^*) &= P(\overline{B}^*)\\ \Phi^*(\underline{B}^*:\underline{B}^*,\overline{B}^*) &= -S\end{aligned}\tag{13}$$

を満足する境界値$\overline{B}^*$，$\underline{B}^*$を求める問題に帰着する．以上の計算で求めた再評価問題の最適値関数を$\Phi^*(\hat{B})$と表す．最適値関数$\Phi^*(\hat{B})$を事前評価問題に導入することにより，事前評価問題の最適値関数$\Psi(\hat{B})$についても同様の操作で解を求めることができる．

4. 数値計算事例

数値計算では，プロジェクト価値が幾何ブラウン運動に従うと仮定した上で，プロジェクトリスクと再評価・事前評価における臨界的プロジェクト価値の関係，事前・再評価費用と臨界的プロジェクト価値の関係，プロジェクトリスクと再評価費用を変化させたときの期待再評価回数について計算した．なお，計算結果については紙面の都合上割愛し，発表の際に解説を行うこととする．

5. おわりに

本研究では，事前・再評価費用を考慮した事前・再評価問題をリアルオプション理論を用いて考えることにより，事前・再評価の見直し機能の導入がもたらす経済価値をプロジェクトの中止オプション価値およびタイミングオプション価値として明示的に考慮し，意思決定プロセスの最適投資タイミングを内生的に決定できるような事前・再評価モデルを提案した．