第II部門　　有限要素法による自由表面を有する流れ場の解析

京都大学工学研究科　正会員　沖　和哉
京都大学工学研究科　フェロー　酒井哲郎
京都大学工学部　学生員　○木村　章

1．はじめに　自由表面を有する流れの現象を把握することは，工学上重要な問題である．このような問題を検討する方法として，数値シミュレーションが広く用いられるようになってきているが，自由表面の形状を精度良く表現することが課題となっている．自由表面流れの解析の方法として，ALE 法・VOF 法・MPS 法などが挙げられるが，膨大な計算時間がかかる事や，自由表面の形状が複雑に変形する場合への適用性に問題があるなどいずれの手法も一長一短がある．そこで本研究では，計算領域の複雑形状が近似しやすく，その境界条件も容易に処理できる有限要素法を用い，密度関数法を適用して自由表面を有する流れ場の解析を行った．数値解析例として，2次元ダムブレイク問題の解析を行い，既往の実験結果との比較を行った．

2．数値解析の手法

（1）基礎方程式

非圧縮流体の連続式と Navier-Stokes の運動方程式はそれぞれ以下のようにあらわされる．

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{t}}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\frac{\mathbf{1}}{\rho}\nabla\mathbf{p}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{F}\quad\mathbf{F}=(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{g}) \tag{2}$$

（2）未知数の離散化と有限要素方程式

P1-P0 要素を用いて基礎式の離散化を行う．すると式(1),(2)はそれぞれ式(3),(4)のように変形され，これらより圧力に関するポアソン方程式(5)が得られる．

$$C^T u_{n+1}=0 \tag{3}$$

$$u_{n+1}=u_n-\Delta t M^{-1}\left(-C\frac{p}{\rho}+B(u)u_n+\frac{\mu}{\rho}Du_n-f_n\right) \tag{4}$$

$$C^T M^{-1} C\frac{p_{n+1}}{\rho}=-\frac{1}{\Delta t}C^T u_n+C^T M^{-1}\left(B(u)u_n+\frac{\mu}{\rho}Du_n-f_n\right) \tag{5}$$

ここで ρ は密度，μ は粘性係数，u_i は節点流速値をすべて含む全体列ベクトル，p はすべての要素圧力値からなる列ベクトル，f_n は外力ベクトル，Δt は計算時間間隔で，$t=n\Delta t$ である．また，$M,C_i,B(u),D$ はそれぞれ，質量，勾配，対流，拡散を表す全体行列である．

（3）自由表面の計算

自由表面の運動学的条件は，自由表面上の流体粒子は常に自由表面上に存在することである．つまり，次の移流方程式によって界面が表される．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\cdot\nabla\phi=0 \tag{6}$$

ここで，ϕ は密度関数である．流れ場計算と同様に基礎式を変形すると，次式が得られる．

$$\phi^{n+1}=\phi^n-\Delta t M^{-1}B(u)\phi \tag{7}$$

式(4),(5)から得られた各時間ステップの流速を用いて式(7)の ϕ を更新し，界面を追跡する．

Kazuya OKI , Tetsuo SAKAI and Akira KIMURA

3．2次元ダムブレイク問題の数値解析例　本手法の有効性を検討するために，ダムブレイク問題の計算を行った．3次元プログラムを作成したが，基本的特性を調べるために2次元の現象で検証した．初期条件として図1に示すように幅L，高さ2Lの水柱を考える．有限要素分割は，長さLあたり30要素とし，全体で水平方向に150要素，鉛直方向に100要素，奥行き方向に1要素（節点数30502，要素数15000），また時間増分は$\triangle t=0.001$とした．密度関数として液体では$\phi=1$，気体では$\phi=0$を各節点で与えた．無次元時刻$t'=t\sqrt{2g/L}$がt'=1.0, 2.0および3.0での流体のスナップショットを図2に示す．ただし，式(8)から求められるϕが0.5となる部分を自由表面とした．この結果より，水柱が崩れる様子がうまく計算されていることが確認できる．また，下端の先端位置Zの変化について計算結果と実験結果（Martin & Moyce, 1992;　玉古, 1994）と比較をしたものを図3に示す．計算結果と実験結果は非常によく一致している．

4．結論　本研究では非圧縮Navier-Stokes方程式に基づく有限要素法に密度関数を適用し，自由表面を有する流れ場の計算を行った．基本的な現象として2次元ダムブレイク問題の計算を行ったところ，概ね妥当な結果が得られた．しかし水柱の角の部分では気体中に発生する速い循環流により，乱れが生じていた．今後の課題として，自由表面をより精度良く再現し，さらに3次元の現象について検証を行う．また，波浪場や大規模問題に対しても適応できるよう改良する．

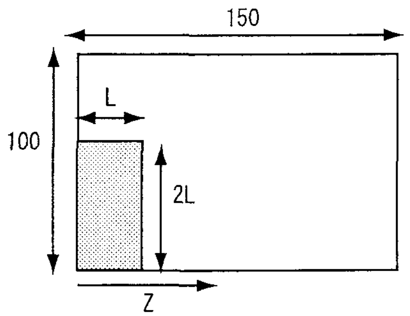

図1　計算初期条件

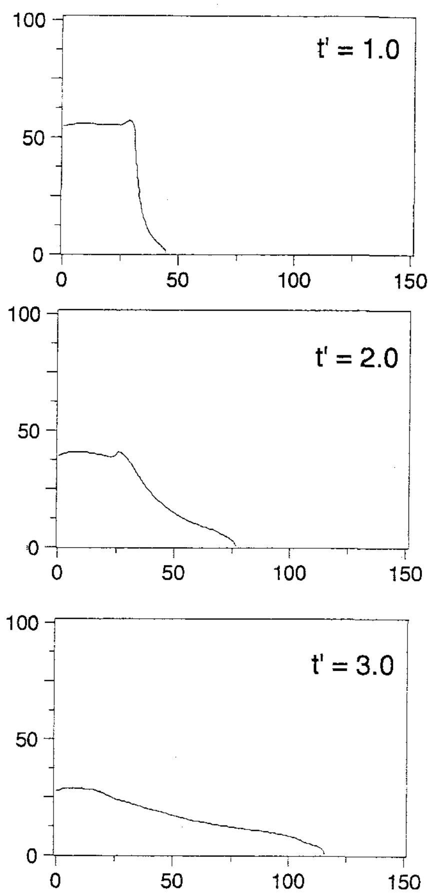

図2　スナップショット

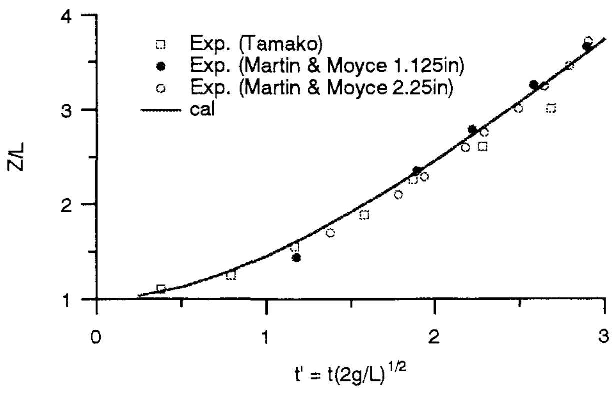

図3　計算結果と実験結果の比較

参考文献
矢川元基・奥田洋司・中林 靖著(1998)：「有限要素法流れの解析」
Martin & Moyce (1992) : An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane
玉古博朗(1994)：界面の分裂飛散を伴う流れ解析のための粒子法の開発