段階的プロジェクトの最適実施戦略に関する研究

京都大学大学院　学生会員　○織田澤 利守
鳥取大学工学部　正会員　横松 宗太
京都大学大学院　フェロー会員　小林 潔司

1. はじめに

長期に渡り段階的に実施される社会資本整備プロジェクトにおいては，プロジェクト間の相互作用を考慮する必要がある．本研究では，リアルオプション理論に基づき，プロジェクト間の相互作用を明示的に考慮した，2段階プロジェクトの動学的投資ルールを導出する．

2. モデルの定式化

(1) モデル化の前提条件

ある単一の意思決定主体が2つのプロジェクトα,βを実施する権利を保有しており，プロジェクトの実施時期及び順序を自由に選択できる．プロジェクト費用をそれぞれC_α, C_βとし，時間を通じて一定と仮定する．プロジェクトは瞬時に完了するものとする．初期時点$t=0$ではいずれのプロジェクトも実施されていない．プロジェクト便益はいずれのプロジェクトも実施されていない状態の下で実現する社会的厚生の差で定義され，確率的に変動するものとする．プロジェクトを時刻tで実施した場合に獲得される便益(初期便益)は，当該時刻になった時点で確実に知ることができる．意思決定主体は各時点で観測される初期便益を確認した上で，その時刻にプロジェクトを実施するか否かを決定する．

(2) 便益過程の定式化

初期時点から一方のプロジェクトが実施される時刻θ_1までを第0期，時刻θ_1から時刻θ_2に残りのプロジェクトが実施されるまでを第1期，時刻θ_2以降を第2期と定義する．2つのプロジェクトが同時に実施された場合は，一方のプロジェクトが実施された直後に残りのプロジェクトが実施されると考える(第1期の期間長が0).

第0期の任意の時刻$t\in[0,\theta_1)$において，プロジェクトs $(s=\alpha,\beta)$を実施した場合に実現する初期便益$B_s^\circ(t)$，仮想的に2つを同時に実施した場合の初期便益$B_{\alpha\beta}^\circ(t)$は，次の幾何ブラウン過程に従うとする．

$$dB_s^\circ(t)=\mu_s^\circ B_s^\circ(t)dt+\sigma_s B_s^\circ(t)dW_s(t) \tag{1}$$

$$B_{\alpha\beta}^\circ(t)=B_\alpha^\circ(t)+B_\beta^\circ(t)+\delta B_{\alpha\beta}^\circ \tag{2}$$

ただし，μ_s°, σ_sはトレンド項及びボラティリティを表し，定数とする．$W_s(t)$はプロジェクトに特有な確率変動を表し，互いに独立な標準ブラウン運動に従うと仮定する．誘発便益$\delta B_{\alpha\beta}^\circ$はプロジェクトが補完関係がある場合は正値を，代替関係の場合は負値をとる．

第1期$[\theta_1,\theta_2)$の期首に先だって実施されたプロジェクト$s(s=\alpha,\beta)$からもたらされる便益$B_s(t)$ $(t\geq\theta_1)$は，初期便益$B_s^\circ(\theta_1)=\hat{B}_s$を初期値とし($\hat{B}$は便益$B$の観測値(確定値)であることを表す)，幾何ブラウン過程

$$dB_s(t)=\mu_s B_s(t)dt+\sigma_s B_s(t)dW_s(t) \tag{3}$$

に従うと考える．プロジェクト実施による誘発効果のため，$\mu_s>\mu_s^\circ$が成立すると仮定する．第1期の任意の時刻t $(\theta_2\geq t\geq\theta_1)$において，残りのプロジェクト$s'$ $(s'\neq s)$が実施された場合，その時刻に実現する瞬間的な追加便益(初期追加便益)を$B_{s'}^I(t)+\delta B_{\alpha\beta}$と表す．第1項は追加的に実施するプロジェクト$s'$による直接的便益(初期直接便益)，第2項はプロジェクトの相互作用による空間的発展オプションである．第2期の初期直接便益$B_{s'}^I(t)$ $(s'=\alpha,\beta)$が次式に従うとする．

$$dB_{s'}^I(t)=\mu_{s'}^I B_{s'}^I(t)dt+\sigma_{s'}B_{s'}^I(t)dW_{s'}(t) \tag{4}$$

第2期$[\theta_2,\infty)$の期首θ_2において残りのプロジェクトs'が実施された後の総便益は，幾何ブラウン過程

$$dB_{\alpha\beta}(t)=\mu_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}(t)dt+\sigma_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}(t)dW_{\alpha\beta}(t) \tag{5}$$

に従う．$W_{\alpha\beta}(t)$は標準ブラウン運動を表す．時刻θ_2での総便益の初期値は$B_{\alpha\beta}(\theta_2)=B_s(\theta_2)+B_{s'}^I(\theta_2)+\delta B_{\alpha\beta}^\circ$と表される．プロジェクト間の関係が補完的であれば$\mu_s^I>\mu_s^\circ$, $\mu_{\alpha\beta}>\mu_s$が成立し，代替的であれば逆向きの不等号が成立する．便益の増加率に相互関係がある場合，あるプロジェクトが他のプロジェクトの実施時刻に影響を及ぼすという時間的発展オプションが存在する．

(3) 第2期問題

いま，先にプロジェクトsが実施されており，第2期の開始時刻$\tilde{\theta}_2$で追加的にプロジェクトs'が実施されるとする．時刻$t\geq\tilde{\theta}_2$以降，2つのプロジェクトの総便益は$B_{\alpha\beta}(\tilde{\theta}_2)=B_s(\tilde{\theta}_2)+B_{s'}^I(\tilde{\theta}_2)+\delta B_{\alpha\beta}^\circ=\hat{B}_{\alpha\beta}$を初期値として式(5)に従って変化する．時刻$\tilde{\theta}_2$の当該期価値で評価した第2期の将来純便益の期待値は

$$F_{\alpha\beta}(\hat{B}_s,\hat{B}_{s'}^I)=E_{B_{\alpha\beta}}\left[\int_{\tilde{\theta}_2}^{\infty}B_{\alpha\beta}(t)\exp\{-\rho(t-\tilde{\theta}_2)\}dt\right] \tag{6}$$

と定義される．$E_{B_{\alpha\beta}}[\cdot]$は$\hat{B}_{\alpha\beta}$を初期値とする確率過程(5)に関する期待値操作を表す．

(4) 第1期問題

プロジェクトsの実施後にいま一方のプロジェクトs'の最適実施時刻を決定する問題を考えよう．第1期のある時刻t $(\theta_2>t\geq\tilde{\theta}_1)$で$B_s(t)=\hat{B}_s$, $B_{s'}^I(t)=\hat{B}_{s'}^I$が観察された時，プロジェクト$s'$の最適実施時刻を決定する問題は次のように定義される．

Toshimori OTAZAWA, Muneta YOKOMATSU and Kiyoshi KOBAYASHI

$$F_s(\hat{B}_s, \hat{B}^I_{s'}) = \max_{\mathcal{B}^I_{s'}} \left\{ E_{\theta_2} \left[\int_t^{\theta_2} B_s(\tau)\exp\{-\rho(\tau - t)\}d\tau + \{F_{\alpha\beta}(\overline{B}_s, \overline{B}^I_{s'}) - C_{s'}\}\exp\{-\rho(\theta_2 - t)\} \right] \right\} \quad (7)$$

subject to 式(3), (4) and $B_s(\theta_2) = \overline{B}_s, B^I_{s'}(\theta_2) = \overline{B}^I_{s'}$
$B_s(t) = \hat{B}_s, B^I_{s'}(t) = \hat{B}^I_{s'}, (\overline{B}_s, \overline{B}^I_{s'}) \in \mathcal{B}^I_{s'}$

集合$\mathcal{B}^I_\beta = \{\overline{B}_s, \overline{B}^I_{s'}\}$は最適臨界便益集合であり，便益$B_s(t), B^I_{s'}(t)$が当該集合内の値と最初に一致した時刻$\theta_2$ $(\theta_2 \geq t)$にプロジェクトs'が実施される．記号E_{θ_2}は時刻θ_2 $(\theta_2 \geq t)$に関する期待値操作を表す．最適値関数F_sを次の準変分不等式により定義し直す．

$$F_s(B_s, B^I_{s'}) = \max \left[F_{\alpha\beta}(B_s, B^I_{s'}) - C_{s'}, \lim_{dt \to 0} \left\{ B_s dt + E[F_s(B_s(t+dt), B^I_{s'}(t+dt))]\exp(-\rho dt) \right\} \right] \quad (8)$$

$E[\cdot]$は微小期間$[t, t+dt)$での便益変動に関する期待値操作を表す．右辺第1項はプロジェクトs'を実施して獲得できる純便益の当該期価値を，第2項はプロジェクトを微小期間先送りしたことにより得られる期待便益の当該期価値を表す．プロジェクトの実施を先送りできる能力は情報オプションとして評価され，投資の不可逆性や将来便益の不確実性が存在するとき大きな価値を有する．式(8)では，便益観測値$\hat{B}_s, \hat{B}^I_{s'}$の下で2つの項の内で大きい値を示す戦略が選択される．プロジェクト実施の留保が最適となるとき，次式が成立する．

$$F_s(B_s, B^I_{s'}) = \lim_{dt \to 0} \left\{ B_s dt + E[F_s(B_s(t+dt), B^I_{s'}(t+dt))]\exp\{-\rho(dt)\} \right\} \quad (9)$$

式(9)の右辺を$B_s(t) = B_s, B^I_{s'}(t) = B^I_{s'}$の近傍でTaylor展開し，$dt \to 0$の期待値操作を行えば，偏微分方程式

$$\frac{\sigma_s^2(B_s)^2}{2}\frac{\partial^2 F_s}{\partial(B_s)^2} + \frac{\sigma_{s'}^2(B^I_{s'})^2}{2}\frac{\partial^2 F_s}{\partial(B^I_{s'})^2} + \mu_s B_s \frac{\partial F_s}{\partial B_s} + \mu^I_{s'} B^I_{s'} \frac{\partial F_s}{\partial B^I_{s'}} - \rho F_s + B_s = 0 \quad (10)$$

を得る．時刻tでプロジェクトs'を実施するのが最適となる場合，value matching条件及びsmooth pasting条件

$$F_s(B_s, B^I_{s'}) = F_{\alpha\beta}(B_s, B^I_{s'}) - C_{s'} \quad (11)$$

$$\frac{\partial F_s(B_s, B^I_{s'})}{\partial B_s} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}(B_s, B^I_{s'})}{\partial B_s} \quad (12)$$

$$\frac{\partial F_s(B_s, B^I_{s'})}{\partial B^I_{s'}} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}(B_s, B^I_{s'})}{\partial B^I_{s'}} \quad (13)$$

が成立する．境界条件(11), (12), (13)のもとで偏微分方程式(10)を解くことで最適値関数$F_s(B_s, B^I_{s'})$と最適臨界便益集合$\mathcal{B}^I_{s'}$を求めることができる．

(5) 第0期問題

第0期の時刻tにおける初期便益の観測値$B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta$の下で，それ以降最適なタイミングでプロジェクトを実施した時に得られる期待便益の最適値関数$F_o(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta)$を次の準変分不等式により定義する．

$$F_o(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) = \max \left[F_\alpha(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) - C_\alpha, F_\beta(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) - C_\beta, \lim_{dt \to 0} E\left[F_o(B^\circ_\alpha(t+dt), B^\circ_\beta(t+dt))\right]\exp(-\rho dt) \right] \quad (14)$$

式(14)において，F_α, F_βは既知である．第0期の初期便益観測値と第1期の直接便益観測値の間に$\hat{B}^I_\alpha = \hat{B}^\circ_\alpha$，$\hat{B}^I_\beta = \hat{B}^\circ_\beta$の関係が成立するため，第0期の終端時刻において$F_\alpha(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta), F_\beta(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta)$と表される．式(14)では，時刻$t$における初期便益観測値の下で3つの項のうち最も大きな値を示す戦略が選択される．プロジェクト実施を見送ることが最適となるとき次式が成立する．

$$F_o(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) = \lim_{dt \to 0} E\left[F_o(B^\circ_\alpha(t+dt), B^\circ_\beta(t+dt)\right]\exp(-\rho dt) \quad (15)$$

第1期問題と同様の方法に従えば，偏微分方程式

$$\frac{\sigma_\alpha^2(B^\circ_\alpha)^2}{2}\frac{\partial^2 F_o}{\partial(B^\circ_\alpha)^2} + \frac{\sigma_\beta^2(B^\circ_\beta)^2}{2}\frac{\partial^2 F_o}{\partial(B^\circ_\beta)^2} + \mu^\circ_\alpha B^\circ_\alpha \frac{\partial F_o}{\partial B^\circ_\alpha} + \mu^\circ_\beta B^\circ_\beta \frac{\partial F_o}{\partial B^\circ_\beta} - \rho F_o = 0 \quad (16)$$

を得る．式(14)より，プロジェクトsを実施することが最適となる臨界便益集合$\mathcal{B}^\circ_s$を次のように定義できる．

$$\mathcal{B}^\circ_s = \left\{(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) \in \Gamma_s | F_o(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) = F_s(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) - C_s\right\} \quad (17)$$

但し，$\Gamma_s = \{(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) | F_s(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) - C_s \geq F_{s'}(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) - C_{s'}\}$であり，プロジェクト$s$を実施した場合の期待純便益の当該期価値がプロジェクトs'を実施した時より小さくならないような初期便益の集合を表す．さらに任意の$(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta) \in \mathcal{B}^\circ_s$に対して，smooth pasting条件

$$\frac{\partial F_o(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta)}{\partial B^\circ_\alpha} = \frac{\partial F_\alpha(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta)}{\partial B^\circ_\alpha} \quad (18)$$

$$\frac{\partial F_o(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta)}{\partial B^\circ_\beta} = \frac{\partial F_\alpha(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta)}{\partial B^\circ_\beta} \quad (19)$$

が成立する．境界条件(17),(18),(19)のもとで偏微分方程式(16)を解くことで，最適値関数$F_o(B^\circ_\alpha, B^\circ_\beta)$と最適臨界便益集合$\mathcal{B}^\circ_s (s = \alpha, \beta)$を求めることができる．以上より，第0期における初期便益の観測値B°_α，B°_βのサンプルパスが集合$\mathcal{B}^\circ_s$ $(s = \alpha, \beta)$内の値とはじめて一致した時点でプロジェクトsを実施し，その後第1期における便益の観測値B_s，$B^I_{s'}$が集合$\mathcal{B}^I_{s'}$内の値とはじめて一致した時点で残りのプロジェクトs'を実施するという2段階プロジェクトの最適実施ルールが導出される．

3. おわりに

プロジェクト間の相互作用と考慮した，段階的プロジェクトの最適実施戦略を導出した．紙面の都合上，本稿では枠組みを提示したに留まる．具体的な計算方法やケーススタディーについては講演時に紹介致したい．