

第II部門 コロケート格子配置における内挿計算スキームに関する考察

京都大学大学院工学研究科
京都大学大学院工学研究科
京都大学大学院工学研究科修士課程

正会員 牛島 省
フェロー 楠津 家久
学生員 ○ 竹村 雅樹

1. はじめに

本研究では、MAC系解法を用いる場合を対象として、コロケート格子配置で使用される内挿計算スキームに関する考察を行う。MAC系解法における流速予測段階での圧力項の取り扱い方の違い、および流速修正段階での修正法の違いを比較する。また実際に、2次元場におけるキャピティフローの計算を行い、その計算結果に基づいてスキームの特性や解法に関する特徴を明らかにした。

2. 数値解法

MAC系解法を用いる場合には、圧力は陰的に扱われる。簡単のため、Navier-Stokes式を基礎式とし、その離散化を考える。時間方向にのみ離散化した基礎式は次のようになる。

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + CD^n \Delta t \quad (1)$$

ここで、上添字 n は時間ステップを表す。 CD は移流項と拡散項を含む項であり、1次元のコロケート格子配置では、通常セル中心で評価される。式(1)では、簡単のため CD にはEuler陽解法を用いた。

p^{n+1} は未知であるから、 p^n を用いて次式により流速を予測する。

$$u_c^* = u_c^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} + CD^n \Delta t \quad (2)$$

ここで、下添字 c はセル中心の値であることを表す。また、セル境界では下添字 b を用いる。式(2)のように、セル中心で圧力を利用する方法をスキームAとする。すなわち、スキームAでは次式によりセル境界における流速が計算されることになる。

$$u_{b,j}^* = \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t - \frac{\Delta t}{2\rho} \left(\frac{p_{j+2}^n - p_j^n + p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \quad (3)$$

下添字 j は、格子点番号を表す。この流速の予測値 $u_{b,j}^*$ を用いて、 $u_{b,j}^{n+1}$ を次のように表すことができる。

$$u_{b,j}^{n+1} = u_{b,j}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (4)$$

ここに、 $\phi = p^{n+1} - p^n$ である。式(4)は次の連続式を満たさなくてはならない。

$$\frac{u_{b,j}^{n+1} - u_{b,j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5)$$

よって、式(4)を式(5)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_{c,j+1}^n - u_{c,j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{CD_{j+1}^n - CD_{j-1}^n}{2\Delta x} \Delta t \right) - \frac{p_{j+2}^n - 2p_j^n + p_{j-2}^n}{4\Delta x^2} \quad (6)$$

次に、 u_c^{n+1} を求める修正段階においては、式(6)により計算された ϕ を用いて p^{n+1} を計算し、式(1)から計算する方法(PG法と表記)と、式(4)により計算された $u_{b,j}^{n+1}$ を空間内挿して計算する方法(SI法と表記)が考えられる。

以上のスキームAに対し、圧力をセル中心でなく、セル境界で評価する方法¹⁾をスキームBとする。すなわち、スキームBでは $u_c^* = u_c^n + CD^n \Delta t$ によりセル中心での流速の予測値が求められ、これよりセル境界において次式により予測値 $\hat{u}_b$ が計算される。

$$\hat{u}_b = u_b^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} \quad (7)$$

したがって、スキーム A の式 (3) に対して、スキーム B では次式によりセル境界での流速が計算される。

$$\hat{u}_{b,j} = \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} \quad (8)$$

スキーム A と同様に $u_{b,j}^{n+1}$ を計算し、式 (5) に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_{c,j+1}^n - u_{c,j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{CD_{j+1}^n - CD_{j-1}^n}{2\Delta x} \Delta t \right) - \frac{p_{j+1}^n - 2p_j^n + p_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (9)$$

式 (6) と式 (9) を比較すると、スキーム A では p^n の 2 階微分がセル幅 $2\Delta x$ 中央差分で表現されるのに対し、スキーム B ではセル幅 Δx で評価される。 n ステップ目のセル中心流速を $n+1$ ステップ目のセル中心流速に修正する方法としては、スキーム A と同様に PG 法と SI 法が考えられる。

3. 計算結果

図 1 から図 4 は、Ghia²⁾ により計算された高精度の解と、今回の計算による解との比較である。 11×11 の粗い格子ではスキーム A よりスキーム B の方が若干 Ghia の結果に近いことがわかる。これは式 (6) と式 (9) を比べると、用いる変数の範囲がスキーム B の方がコンパクトであり、これによりスキーム B の方がより精度の高い計算ができたと考えられる。しかし、セル数を 25×25 と細かくすることにより、スキーム A でもスキーム B と同じ程度の精度の計算ができています。これは、用いる変数の使用範囲が広いことに対するスキーム A の欠点で、格子分割を細かくすることで補われた結果だと考えられる。また、SI 法は PG 法に比べて大きく精度が低下した。これは、SI 法は PG 法より広範囲の変数を使用するので、数値解が平滑化されてしまい精度が低下したためと考えられ、図 5 と図 6 を比較してもその様子が確認できる。

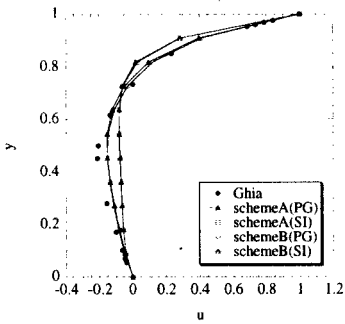


図 1 u の Ghia の結果との比較 ($Re = 100$, セル数 11×11)

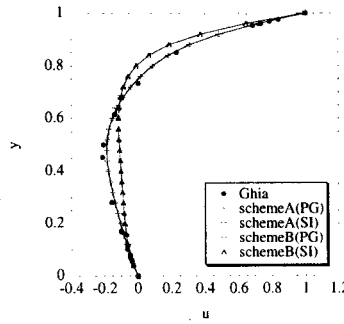


図 2 u の Ghia の結果との比較 ($Re = 100$, セル数 25×25)

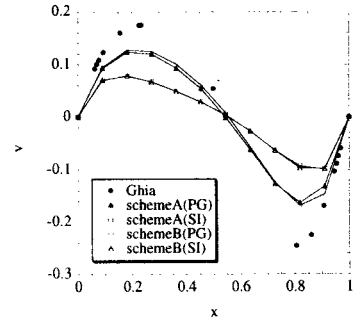


図 3 v の Ghia の結果との比較 ($Re = 100$, セル数 11×11)

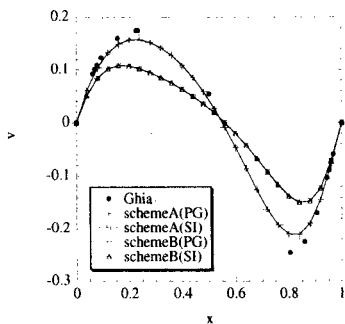


図 4 v の Ghia の結果との比較 ($Re = 100$, セル数 25×25)

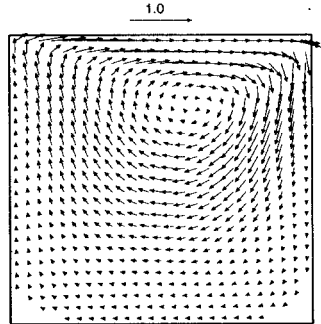


図 5 流速ベクトル図 (PG 法)

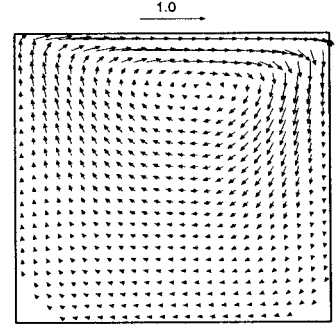


図 6 流速ベクトル図 (SI 法)

4. おわりに

スキーム A, B 間の精度差は比較的わずかであったが、予測段階にスキーム B, 修正段階に PG 法を用いるのが適切である。今後は自由水面流れなどを対象として考察を進める予定である。

参考文献

- 1) 牛島省, 棚津家久. QSI スキームを用いた流体解析法の適用性について. 応用力学論文集, Vol. 4, pp. 95-102, 2001.
- 2) U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.