第I部門　　スペクトル確率有限要素法の三次元波動場への適用

京都大学工学部　学生会員　○村上裕宣
京都大学防災研究所　正会員　佐藤忠信
京都大学防災研究所　正会員　本田利器

1. はじめに

効率的な耐震設計を行うためには地震動の正確な予測が重要であるが，地震動に影響を及ぼす要素が多くの不確定性を含んでいるため，これには様々な困難がある．また，地盤は複雑なランダム場であるため，その影響を考慮することも重要である．このため，諸条件の不確定性を定量的に考慮した検討は重要であるといえる．

本研究では，不確定性を定量的に考慮した解析を効率的に行うための有効な手段としてスペクトル確率有限要素法[1)]（SSFEM）を考える．同手法の波動伝播解析への適用例としては，本田[2)]による二次元波動場への適用が挙げられる．そこで本研究では，SSFEMの三次元波動場への適用を提案する．ここでは，定式化の提示，及びモンテカルロシミュレーションとの比較により適用性の検証を行う．

2. スペクトル確率有限要素法（SSFEM）

詳細は，参考文献[1)]に譲る．本論文では，剛性が不確定性を有する問題に対してSSFEMを適用する．

まず，剛性$G(x,\theta)$をガウス確率過程とし，これをKarhunen-Loève展開（KL展開）する．

$$G(x,\theta)=\overline{G}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(\theta)\sqrt{\lambda_i}f_i(x) \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，x，θはそれぞれ位置，確率空間において対応する事象を表す．$\overline{G}(x)$は$G(x,\theta)$の期待値，$\xi_i(\theta)$は正規直交性を有する独立ガウス確率変数であり，λ_i及び$f_i(x)$は剛性の相関関数によって決まる基底関数である．

一方，解として得られる変位$u(\theta)$はガウス過程とは限らない．そこで，変位をPolynomial Chaos展開（PC展開）する．

$$u(\theta)=u_0+\sum_{i=1}^{\infty}u_i\Psi_i[\{\xi_l\}] \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，$\Psi_i[\{\xi_l\}]$はガウス確率変数を引数とする汎関数である．解析においては，KL展開，PC展開ともに展開次数を有限として近似する．以下では，KL展開の展開次数をKLと表す．

これらを用いることで，不確定性を有する波動場を表す運動方程式を展開することができる．この展開された式を解くことで，近似的に変位$u(\theta)$を求める．

3. 解析例

(1) 解析条件

本章では，SSFEMによる解析の妥当性を検証するため，モンテカルロシミュレーション（MCS）との比較を行う．解析の対象としては，要素分割を$7\times7\times7$とする$1.0\times1.0\times1.0$の領域を考える．この領域において，不確定性を有するパラメータはせん断剛性Gのみとする．剛性Gの自己相関関数は次式で与えられるとする．

$$C(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)=(\gamma\overline{G})^3\exp\left\{-\frac{(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)}{b}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで，bは相関距離に相当するパラメータであり，ここではb=1.0とした．γはばらつきの大きさを決めるパラメータであり，ここでは期待値の10%となるようγ=0.1とした．波源として，時刻t=0.0[sec]に，領域の中央にインパルス的な体積膨張を与えた．波源及び観測点OP1，観測面OS1の位置を図-1に示す．

解析手法としては以下に述べる方法を用いた．MCSについては，試行回数を5000回とした．試行を5000回行うことで，対象とする問題の確率的な性質は十分表されている．SSFEMについては，展開次数による影響を比較するため，KL展開の展開次数をKL=4としたもの及びKL=2としたものを用いた．また，比較のため，剛性が一様に$\overline{G}$である場を対象とした確定的なFEM解析も行った．

Hironobu MURAKAMI, Tadanobu SATO, Riki HONDA

(2) 解析結果

観測点OP1におけるx方向の変位の時刻歴を図-2に示す．同図では，MCSとSSFEMにより得られた変位の期待値及びFEM解析で得られた値がプロットされている．FEMによる結果はMCSによる結果と異なっているが，これは不確定な場と剛性を一様とした場における波動伝播は異なることを示している．また，SSFEMによる結果はMCSによる結果と良く一致しており，SSFEMは場の不確定性を考慮できているといえる．

観測面OS1における，時刻t=4.0[sec]でのMCS及びSSFEMによるz方向の変位の分散を図-3に示す．SSFEMにおいて用いたKL展開の項数が多い程，MCSの結果を精度よく近似できており，またSSFEMによる分散値はMCSによる値を概ね再現できている．

観測点OP1における，時刻t=4.0[sec]でのMCSとSSFEMによるx方向の変位の期待値の確率密度分布を図-4に示す．SSFEMによる確率密度分布はMCSによる分布を精度よく再現できている．

今回の解析はCPUがPentiumIII(クロック数850MHz)の計算機を用いて行った．解析に要した計算時間は，MCSでは110時間であったのに対して，KL=4としたSSFEMでは55分，またKL=2とした場合には27分であった．これは，SSFEMを用いることにより不確定性を有する三次元波動場の解析を非常に効率的に行えたことを意味する．

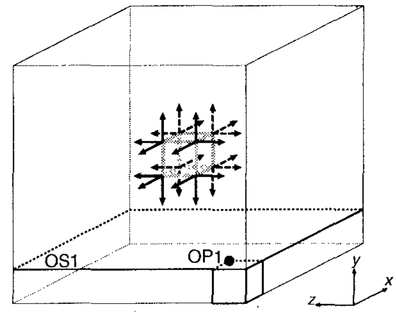

図-1 波源及び観測点・観測面の位置

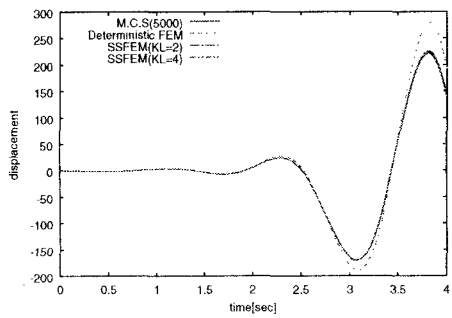

図-2 観測点OP1におけるx方向の変位の時刻歴

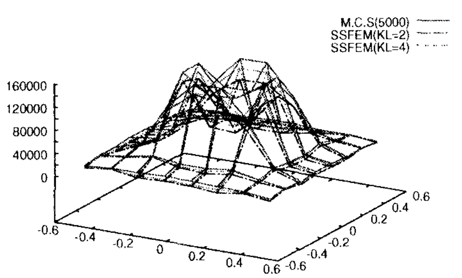

図-3 観測面OS1におけるz方向の変位の分散 (t=4.0[sec])

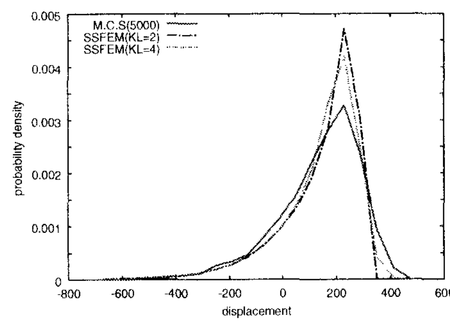

図-4 観測点OP1におけるx方向の変位の期待値の確率密度分布 (t=4.0[sec])

4. 結論

本研究では，不確定性を有する三次元波動場における波動伝播解析を効率的に行うために，スペクトル確率有限要素法（SSFEM）の適用を提案した．本手法による解析結果とモンテカルロシミュレーションによる解析結果はよく一致しており，また計算時間も大幅に短縮された．これらの結果から，SSFEMは不確定性を有する三次元場における波動伝播を効率的に解析できる手法であるといえる．

参考文献

1) Ghanem, R. G. and Spanos, P. D. : Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach, Springer - Verlag NY, 1991.
2) 本田利器：スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析，土木学会論文集，No.689/I-57, pp.321-331, 2001. 10.