第I部門　　加速度観測に基づく線形同定法

京都大学防災研究所　正会員　佐藤忠信
京都大学工学部　学生員　○荻山和樹

1. まえがき

一般に構造同定の問題は非線形状態方程式と非線形観測方程式より構成されるので，同定の問題は制約条件のない非線形最適化の問題を解くことに帰着する．しかし，非線形最適化の問題では解の存在や一意性，解の構成法やその安定性を一般的に議論することは困難である．そこで本研究では，非線系構造システム方程式を基本線形部分とそれからの増分で表現できる部分（線形であっても非線形であっても良い）とに分割し，この増分部分を等価な増分外力項と見なすことにより，システム方程式を線形化し，同定問題の線形化を行う．構造物の全質点で加速度の観測値が与えられる場合を対象として，漸化型最小二乗法[1)]を用いて構造物の動的パラメータを同定する方法を展開し，数値シミュレーションによりその有用性を検証する．

2. 漸化型最小二乗法

いま，次のように表される観測方程式が得られたとする．

$$\boldsymbol{f_t} = \boldsymbol{H_t d_t} + \boldsymbol{v_t} \qquad (1)$$

ここで，$\boldsymbol{f_t}$ は観測値，$\boldsymbol{d_t}$ は決定したいパラメータ値のベクトル，$\boldsymbol{v_t}$ は観測誤差であり，$\boldsymbol{H_t}$ は観測行列である．

過去の観測値の二乗誤差に重み $\beta_{t,i}$ を乗じた評価関数[2)]を考えると，評価関数 J_t は次のように表現される．

$$J_t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\beta_{t,i}\,[\boldsymbol{f_i} - \boldsymbol{H_i d_i}]^T \boldsymbol{R_i}^{-1}[\boldsymbol{f_i} - \boldsymbol{H_i d_i}] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\beta_{t,i}\boldsymbol{d^T W_i d} \qquad (2)$$

ここで，$\boldsymbol{R}_i$ は観測誤差共分散行列，$\boldsymbol{W}_i$ は対角行列で評価関数 J_t の第1項目と第2項目のバランスを決定する重み行列であり，調整項と言われる．重み $\beta_{t,i}$ は $0 \le \lambda_t \le 1$ なる変数 λ_t の積として次のように定義する．

$$\beta_{t,i} = \prod_{j=i+1}^{t}\lambda_j \quad , \quad \beta_{t,i} = \lambda_t\beta_{t-1,i} \quad , \quad \beta_{t,t} = 1.0 \qquad (3)$$

λ_t は過去の観測値を忘却する速さを支配しており，このことから忘却係数と呼ばれている．評価関数 J_t を最小化するパラメータ値が時刻 t における最適な同定値である．ここで，式(2)で両辺の変分を取りその変分値を0とすることで次式が得られる．

$$\boldsymbol{\hat{d}_t} = \boldsymbol{Q_t}^{-1}\boldsymbol{z_t} \quad , \quad \boldsymbol{Q_t} = \sum_{i=1}^{t}\beta_{t,i}(\boldsymbol{H_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R_i}^{-1}\boldsymbol{H_i} + \boldsymbol{W_i}) \quad , \quad \boldsymbol{z_t} = \sum_{i=1}^{t}\beta_{t,i}\boldsymbol{H_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R_i}^{-1}\boldsymbol{f_i} \qquad (4)$$

式(3)の関係を用いて $\boldsymbol{Q_t}$ 及び $\boldsymbol{z_t}$ の表現を書き換えると次式を得る．

$$\boldsymbol{Q_t} = \lambda_t\boldsymbol{Q_{t-1}} + (\boldsymbol{H_t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R_t}^{-1}\boldsymbol{H_t} + \boldsymbol{W_t}) \quad , \quad \boldsymbol{z_t} = \lambda_t\boldsymbol{z_{t-1}} + \boldsymbol{H_t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R_t}^{-1}\boldsymbol{f_t} \qquad (5)$$

式(5)を式(4)に代入すると，パラメータの最適値に関する漸化式として次式を得る．

$$\boldsymbol{\hat{d}_t} = \boldsymbol{\hat{d}_{t-1}} + \boldsymbol{Q_t}^{-1}[\boldsymbol{H_t}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R_t}^{-1}(\boldsymbol{f_t} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\hat{d}_{t-1}}) - \boldsymbol{W_t}\boldsymbol{\hat{d}_{t-1}}] \qquad (6)$$

よって，式(6)により $\boldsymbol{\hat{d}_t}$ を求めるには，パラメータの初期値 $\boldsymbol{\hat{d}_0}$ を与え，各時刻において観測値 $\boldsymbol{f_t}$，観測行列 $\boldsymbol{H_t}$，観測誤差共分散行列 $\boldsymbol{R_t}$ 及び重み行列 $\boldsymbol{W_t}$ を与えれば良い．

3. 構造同定手法

一般に，各質点に外力が加わる場合の n 自由度構造系の運動方程式は，

$$\boldsymbol{M\ddot{x}(t)} + \boldsymbol{C\dot{x}(t)} + \boldsymbol{Kx(t)} = \boldsymbol{F(t)} \qquad (7)$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}$，はそれぞれ質量マトリックス，粘性減衰マトリックス，剛性マトリックスであり，$\boldsymbol{\ddot{x}(t)}$，$\boldsymbol{\dot{x}(t)}$，$\boldsymbol{x(t)}$ はそれぞれ構造物の地盤に対する加速度，速度，相対変位で，$\boldsymbol{F(t)}$ は各質点に作

Tadanobu SATO, Kazuki OGIYAMA

用する外力である．また，t は時間を表している．粘性減衰マトリックス $\boldsymbol{C}$ と剛性マトリックス $\boldsymbol{K}$ を基本要素と増分要素に分けて考えることにより，式(7) は次のように表される．

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\Delta C}\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) \quad \cdots\cdots (8)$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{C}}, \bar{\boldsymbol{K}}$ は基本要素を表し，$\boldsymbol{\Delta C}, \boldsymbol{\Delta K}$ は増分要素を表している．式(8) における増分要素に関する項を等価調整外力項として

$$\boldsymbol{\Delta f}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Delta C}\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \quad \cdots\cdots (9)$$

とおき，式(8) に Newmark の β 法を適用すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta f}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) &- \left(\boldsymbol{M} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{C}}\Delta t + \bar{\boldsymbol{K}}\beta\Delta t^2\right)\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) - \left\{\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{C}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t\right\}\Delta t\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\Delta t}) \\ &- (\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{K}}\Delta t)\,\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\Delta t}) - \bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\Delta t}) \quad \cdots\cdots (10)\end{aligned}$$

ここで，Δt は時間刻みである．時刻 t_n における加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ が観測されたとすれば，等価調整外力項 $\boldsymbol{\Delta f}(\boldsymbol{t})$ は時刻 t_{n-1} における加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\Delta t})$，速度 $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\Delta t})$，変位 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\Delta t})$ と時刻 t_n における加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ より与えられる．従って，式(9) は増分要素 $\boldsymbol{\Delta C}$ 及び $\boldsymbol{\Delta K}$ の同定問題となりうる．

パラメータの同定を行なう際，漸化型最小二乗法を用いる．いま，決定したいパラメータベクトル $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$ を次のようにおく．

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) = \left[\Delta c_1 \ \ \ldots \ \ \Delta c_n \,\middle|\, \Delta k_1 \ \ \ldots \ \ \Delta k_n\right]^T \quad \cdots\cdots (11)$$

また，式(9) より，観測方程式は次式で表せる．

$$\boldsymbol{\Delta f}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{v_t} \quad \cdots\cdots (12)$$

4.　数値解析

解析の対象とするモデルは図-1 に示す 5 自由度構造系とする．入力地震動は，El Centro(1940,NS) の地震観測記録を用い，最大加速度が 25gal になるように修正した波形を用いる．地震動入力開始から 5 秒後に質点 2 及び 4 の動的パラメータが急に変化する場合を対象として，数値シミュレーションを行なう．また，ここでは忘却係数である λ の値を変化させる．具体的には評価関数 J_t の第 1 項について現ステップから過去 20 ステップの平均をとり，その値が一定値を越えると動的パラメータ値が変化したとみなして，λ の値を小さくする．図-2 に質点 4 の動的パラメータの同定結果の時刻歴を示す．動的パラメータの変化を良く追従しており，変化しない質点においても真値へ収束している．

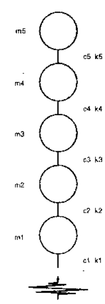

図-1 5 自由度構造系

5.　結論

本研究では，等価調整外力介在法を用いて動的パラメータを同定するアルゴリズムの開発を行った．加速度観測を行うことを前提として，全点観測の条件のもと，提案した手法の有効性を検証した．

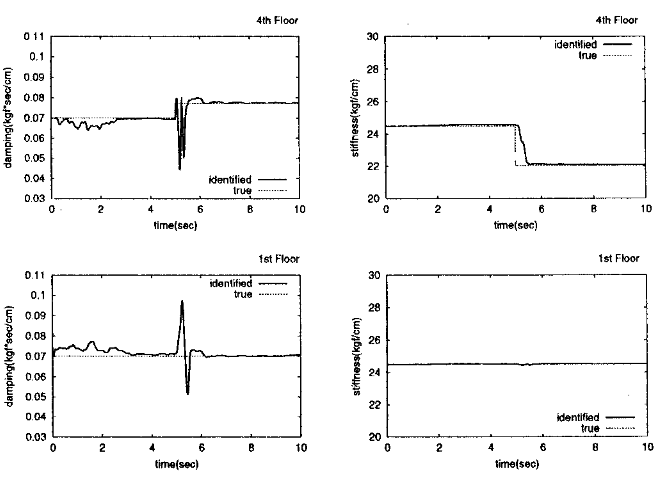

図-2 粘性減衰係数と剛性の同定時刻歴（上から質点 4，1）

参考文献

1) L.Ljung : System Identification Theory for the User, Chapter 11 recursive esitmation methods, pp303-338, PRT Prentice Hall, 1987.
2) L.Ge and T.T.Soong : Damage Identification Through Regularization Method, Journal of Engineering Mechanics, Vol.124, No.1, January, pp.103-116, 1998