第III部門　　有限要素法および境界要素法による弾性体のコンプライアンス最小形状の探索

京都大学工学研究科　正会員　田村　武
京都大学工学研究科　学生員　○西藤　潤

1. はじめに

構造物の最適設計には種々の定義がなされているが[1]，本研究では最適設計を「弾性体にある定められた外力が作用したときに，コンプライアンスが最小になる形状を決定すること」と定義し，その形状を有限要素法（FEM）と境界要素法（BEM）の2つの数値解析法を用いて求めることを目的とする．

コンプライアンスは一定荷重のもとで生じるひずみと応力の積を領域全体で積分したものに1/2を乗じた値である．

$$\text{Compliance} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV \tag{1}$$

コンプライアンスは弾性体内に蓄えられるエネルギーのことで，これは外力のなす仕事に等しい．つまり，コンプライアンスを最小にするということは全体的な変形を小さくすることを意味する．

2. 解析方法

(1) 解析モデル

最適形状を求める際に以下のことを仮定する．

- 構造物は等方線形弾性体とする．
- 物体力を無視する．
- 2次元静的問題とする．

これに体積一定の条件を課し，コンプライアンスを最小にする．

(2) 変分原理

領域の変分を考慮した変分原理を用いると以下の2つが等価であることがわかる[2]．

(i) 釣り合いの条件を満たしながらコンプライアンスが最小になること．

$$\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rightarrow \min \tag{2}$$

(ii) 境界 S_X 上でエネルギー密度 W が一定であること

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - f_i u_i = \text{constant} \tag{3}$$

（ここで S_X は形状の変化を許す境界である．この境界を変化させることにより最適形状を図る．）これにより問題を(i)から(ii)に置き換えて考えることができる．

式(3)と体積一定の条件を離散化し，有限要素法と境界要素法の2つの手法で解析を行う．

(3) 数値解析法

有限要素法は豊富な実績を持ち，汎用プログラムが多数存在する．また，適用性が極めて広く，不均質，非線形問題などに強い面を持っている．さらに，計算処理が単純であるという利点も持つ．しかし，領域全体を要素分割するため，分割が煩雑になる．さらに，最適化問題を解く場合には境界 S_X 上の情報のみを必要とするにもかかわらず，領域内部の変位の計算も行うため，無駄な計算が生じる．

これら有限要素法の問題を解決する方法が境界要素法である．境界要素法では，要素分割を領域の境界のみで行うため分割が容易であり，また，境界要素法を用いたときに得られる解は，境界上の節点における変位またはトラクションのみである．

3. 解析結果

(1) 片持ち梁の解析

片持ち梁の自由端に鉛直荷重とモーメント荷重を加え，下縁端の形状を変化させ最適形状を求める問題を考える（図1）．ここでは初期形状を矩形とし，梁高さを1，梁長さを10とする．また，自由端に加える鉛直荷重を1，モーメント荷重を1とする．

この片持ち梁の最適形状は梁理論によって近似解を求めることができる．これと数値解析法で求めた解を比較して定式化の妥当性とプログラムの妥当性を評価する．

有限要素法の解析には160要素に分割した片持ち梁を用いた（図2）．最適形状と梁理論の解を重ねたものを図3に示す．

境界要素法による解析には88要素に分割した片持ち梁を用いた（図4）．最適形状と梁理論の解を重ねたものを図5に示す．

図3，5より有限要素法，境界要素法の数値解析法で求めた最適形状がともに梁理論で求めた解とほぼ一致していることが確認できる．

Takeshi TAMURA, Jun SAITO

(2) 空孔問題の解析

次に外部問題の代表例である空孔問題を取り扱う．空孔のある無限領域の弾性体に縦方向と横方向に圧力をかけ，空孔の形状を最適化する問題を考える（図6）．ここでは，$p_x : p_y = 1 : 1$ とする．

有限要素法の解析では有限領域しか扱えないため，領域を切り出して考えることとする．また，対称性を利用すると，領域の 1/4 の部分のみ対称とすることができる．初期形状を図 7 に示す．空孔付近の初期形状と最適形状を図 8 に示す．

境界要素法では外部問題として解く．このとき，要素は空孔の境界のみである．解析結果を図 9 に示す．

有限要素法，境界要素法ともに空孔は円形になった．実際，円形の空孔の存在する弾性体に $p_x : p_y = 1 : 1$ となる応力を加えると，空孔境界のエネルギー密度が一定になることが弾性論によってわかる．

4. 本研究のまとめ

片持ち梁の問題において梁理論の解と比較することにより，有限要素法および境界要素法を用いて最適形状が解析的に得られることを確認した．また，境界要素法を用いて無限領域（外部問題）の形状最適化問題が解けることを確認した．今後の課題としては，計算速度，計算精度，収束の安定性を向上，他問題への適用などが考えられる．

参考文献

1) 山田善一（編）：構造システムの最適化, 構造工学シリーズ 1, 土木学会,1998.

2)Banichuk,N.W.: *Problems and Methods of Optimal Structural Design*, Plenum Pless,New York,1983.

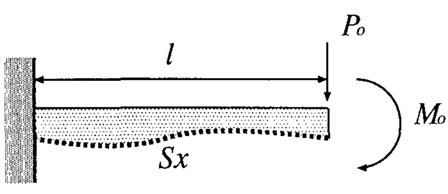

図 1：片持ち梁の問題設定

図 2：初期形状（FEM）

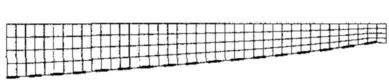

図 3：最適形状と梁理論の解（FEM）

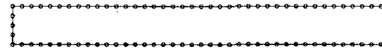

図 4：初期形状（BEM）

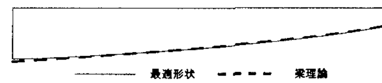

図 5：最適形状と梁理論の解（BEM）

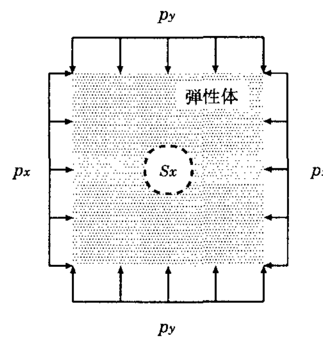

図 6：空孔の問題設定

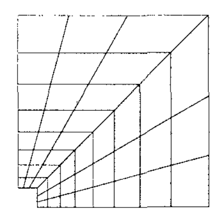

図 7：初期形状（FEM）

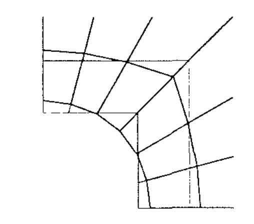

図 8：最適形状（FEM）

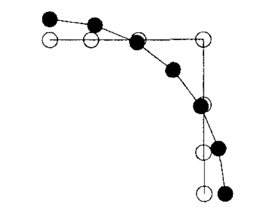

図 9：初期形状と最適形状（BEM）