第Ⅱ部門　　直交格子を用いた任意境界形状を有する流れ場の数値解法の検討

神戸大学工学部　学生員○中村　卓
神戸大学大学院自然科学研究科　学生員　不破洋史
神戸大学大学院自然科学研究科　正会員　中山昭彦

1. 序論

流体の数値解析を行う上で離散化の手法は計算格子の種類によって幾つかに分類することができる．一般に広く用いられてきた境界適合格子は高い精度を誇るが，格子作成に労力を要し任意形状に適合する計算格子を作成することは不可能である．また有限要素法的なアプローチで用いられる非構造格子は多大な計算時間を要する点が大きな課題といえる．一方，直交格子は格子形成が容易であり有用性が近年見直されてきている．直交格子で離散化したときに境界を表現する方法としては従来から矩形格子近似法が用いられているが，この手法は変数の定義位置で境界条件を与えるため境界と格子線が一致しないときはその精度に疑問を抱かざるを得ず，直交格子を用いた新しい境界表現方法が検討されている[1),2)].

本研究では，比較的プログラムの簡単な矩形格子近似法と，その改良法として Shortley-Weller 近似[3)]を運動方程式の差分に応用する計算法を直交格子で適用し，それぞれの精度を比較検討した．なお計算対象は簡単な 2 次元境界を選んだ．

2. Shortley-Weller 近似の概要とその離散化

Shortley-Weller 近似とは不等分割点での 2 階微分に対する差分近似である．これを一般化し，変数の定義位置から実際の境界の位置までの距離を基礎式に組み込むことで境界表現の精度が上がると考えられる．ここでは，矩形格子近似の改良法として，Shortley-Weller 近似を用いた運動方程式の差分法を説明する．基礎式は連続式と運動量方程式から成り，式(1)-(3)に成分表記で記す．

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &\cong \left(\frac{2}{h_E h_W}+\frac{2}{k_S k_N}\right)U(\mathsf{P}_0)-\frac{2}{h_E(h_E+h_W)}U(\mathsf{P}_E)\\ &-\frac{2}{h_W(h_E+h_W)}U(\mathsf{P}_W)-\frac{2}{k_S(k_S+k_N)}U(\mathsf{P}_S)-\frac{2}{k_N(k_S+k_N)}U(\mathsf{P}_N)\end{aligned} \tag{4}$$

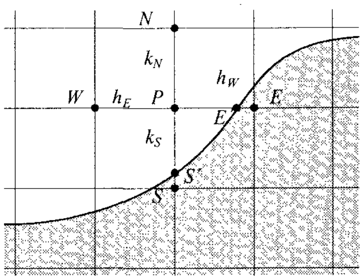

図-1　隣接する点

図-1 のように境界までの距離が格子の分割幅以下の計算点では，境界がある方向の隣接する点を境界上に設定する．各点で計算に必要な隣接する点までの距離を h_E, h_W, k_N, k_S と置く．今回は圧力を格子の中心に，速度を格子線上に定義するスタガード格子を用いたため，これをそれぞれの変数に関して定義した．隣接する点がすべて流体中にある場合は，通常の差分と同じになる．2 階微分の項は，Shortley-Weller 近似によって式(4)のように離散化される．その他の項も，隣接する点までの距離を用いて離散化する．圧力の境界条件は，レイノルズ数が大きい場合粘性項は無視できるものとして，ノイマン条件を適用して境界上で与えた．

Suguru Nakamura, Hiroshi Fuwa and Akihiko NAKAYAMA

3. 計算条件と結果

境界形状を図-2，図-3 に示す．すべてのケースにおいて上端にはすべり(slip)条件，下端にはすべりなし(non-slip)条件を与えた．流入は $U_0=1$ の一様流入，流出は自由流出とした．レイノルズ数は U_0 と D を基準に 10 とした．表-1 に用いた計算格子を示す．これから示す結果は流れが十分発達した流れとなるまで計算をすすませた後のものである．図-4 はケース 1 の断面①，②における速度の x 方向成分をプロットしたもの，図-5 は GridB を用いたときのケース 1 の境界付近の流速ベクトルを示したものである．図-6 はケース 2 を矩形格子近似法を用いて GridA で解いた境界付近の流速ベクトルである．

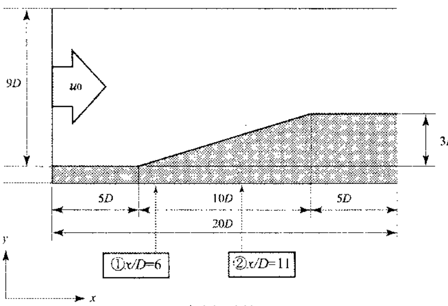

図-2　境界形状ケース 1

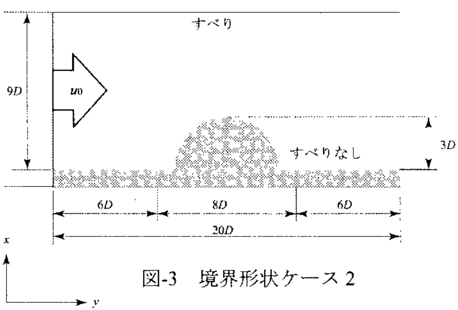

図-3　境界形状ケース 2

	GridA	GridB
格子数	101·51	41·21
Δx	0.2D	0.5D
Δy	0.2D	0.5D

表-1　用いた計算格子

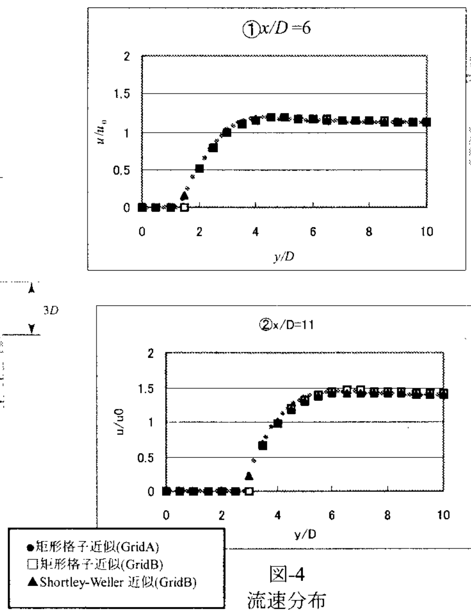

図-4
流速分布

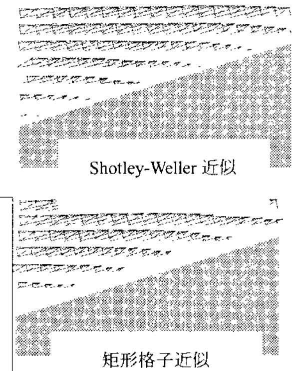

図-5
ケース 1 の流速ベクトル

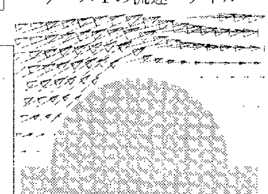

図-6
ケース 2 の流速ベクトル

4. 結論

Shortley-Weller 近似を用いた場合，矩形格子近似を用いた場合とも計算結果に大きな差はなかった．矩形格子近似は精度に関してよく問題にされるが，さほど悪いものでもないということがこの計算結果からわかる．今回の計算法では境界までの距離を計算に組み入れたが，計算の安定性ならびに精度を向上させるためにさらに検討する必要がある．

参考文献

1) 市川治，藤井孝蔵：直交格子を使用した 3 次元の任意形状物体まわりの流体シミュレーション，第 14 回数値流体力学シンポジウム講演論文集，E03-2, 2000.

2) 松永奈美，劉浩，姫野龍太郎：ボクセル情報を用いた直交座標系における 2 次元非圧縮粘性流れの数値計算,第 14 回数値流体力学シンポジウム講演論文集，C03-3, 2000.

3) Forsythe, G.E. and Wasow, W.R.: *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John-Wiley & Sons, Inc., pp.175-204, 1960.