# kinematic wave 法による確率洪水予測のアルゴリズムの開発

京都大学工学部　学生員　○　佐藤芳洋
京都大学大学院　正員　椎葉充晴

**1　はじめに**　河川流域において、洪水災害防止のために、より有用なきめ細かな洪水流出予測手法を開発する必要がある。そこで本研究では、研究対象流域場に、現在実用化されている雨水流モデルである kinematic wave モデルそのもの、つまり、集中化しない、分布型そのままで用いて、それに降雨流量予測の誤差を補償するノイズ項を導入して、洪水流出の実時間確率予測手法を検討し、そのアルゴリズムを開発する。

**2　本研究の方針**　ある流域において、確率論的な予測計算により状態量の推定を行なうことを考える。まず、その流域を、最上流端～合流点、合流点～合流点、合流点～最下流端という基準で区分化し、合計 $M$ 個の河道区分に分けられたとする。以下のような kinematic wave モデル

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q(t)=\bar{q}(t)+p(t) \qquad Q=\alpha A^m \tag{1}$$

を差分解法によって解くことにし、各河道区分内に $N$ 個 (上流から等間隔に $i=0,1,\cdots,N$ と番号をつける) の格子点を設ける。ここで、$A$ は通水断面積、$Q$ は流量、$x$ は距離、$t$ は時間、$q(t)$ は横流入強度、$\overline{q}(t)$ は予測された横流入強度、$p(t)$ は横流入強度の予測誤差である。また、$\alpha>0$、$m\geq 1$ は定数である。$M$ 個の河道区分の格子点の総数を $W$ とすると、河道網全体の状態は、これらの $W$ 個の格子点での通水断面積で表されることになる。これらの $W$ 個の状態量の推定値と推定誤差の共分散行列そのものを計算していく方式を採用すると、その計算量は膨大なものになり、予測計算に多くの時間を費さなければならない。椎葉ら[1]は、近似計算により予測計算の量を減らすために「共分散行列の truncation」を提案している。しかし、この方法は状態量の次元を減らすことは可能だが、各時間ステップで共分散行列を分解しなければならないという問題点が残る。

そこで本研究では、各河道区分の最下流端の通水断面積を、推定すべき状態量 $X(t)$ として採用することにする。そして、各河道区分の最下流端以外の格子点の通水断面積 $A(x_i,t)$ をその河道区分の下流端の通水断面積の関数として扱うことにより、洪水流出の確率予測を行なう。ここで、$x_i$ は上流端から $i$ 番目の点までの距離である。

**3　洪水流出の確率予測手法**　最初に、横流入強度の予測誤差にも何らかの確率構造を考えることにし、有色ノイズモデル[2] $\dfrac{dp(t)}{dt}=-\dfrac{1}{\tau}p(t)+v(t)$ を導入する。この式を時刻 $t_n$ から時刻 $t_{n+1}$ まで積分すると、以下のような形に表すことができる。

$$p(t_n)-\overline{p}(t_n)=\frac{1}{m_n}\left\{p(t_{n+1})-\overline{p}(t_{n+1})\right\}-\frac{1}{m_n}v_n \tag{2}$$

次に、任意の河道区分 $L_j$、$L_k$、$L_l$ (ただし、河道区分 $L_l$ の上流端では河道区分 $L_j$、$L_k$ が合流している) について洪水流出の確率予測手法を検討する。ここで、河道区分 $L$ には添字として 1 から始まる一連の番号をつけることにし、上流にある河道区分に若い番号をつけるものとする。したがって、$j,k<l$ であるとする。さらに、河道区分 $L_j$ の上流側に $Y$ 個の河道区分 $L_{j_h}(h=1,2,\cdots,Y)$ があり、また、河道区分 $L_k$ の上流側に $Z$ 個の河道区分 $L_{k_h}(h=1,2,\cdots,Z)$ がある。これにより、この流域の推定すべき状態量は、確率過程的に考えるので、$\Phi(t)=[p(t),X_1(t),\cdots,X_l(t),\cdots,X_M(t)]$ と表すことにする。また、状態量 $\Phi(t)$ の推定誤差分散行列を $\Psi(t)$ と表すことにする。さらに、以下では $\Phi(t_n)$、$\Psi(t_n)$ を $\Phi^n$、$\Psi^n$ と表すことにし、$\Phi^n$ の推定値を $\overline{\Phi}^n$ と表すことにする。

まず、各格子点での通水断面積の予測値を、(1) 式から、計算時間ステップの変動が可能な TRAM 法[3]を Adams の公式[3]に適用することにより求めておく。そして、時刻 $t_n$ での河道区分 $L_l$ の上流から $i$ 番目の点の通水断面積 $A^n_{l,i}$ を、$A^n_{l,i}$ の推定値 $\overline{A}^n_{l,i}$ を用いて、

$$\begin{aligned}A^n_{l,i}=\overline{A}^n_{l,i}&+\sum_{h=1}^{Y}a^n_{j_h,i}\tilde{X}^n_{j_h}+\sum_{s=1}^{Z}a^n_{k_s,i}\tilde{X}^n_{k_s}\\&+a^n_{lj,i}\tilde{X}^n_j+a^n_{lk,i}\tilde{X}^n_k+a^n_{ll,i}\tilde{X}^n_l+b^n_{l,i}\tilde{p}^n\end{aligned} \tag{3}$$

と表されていると仮定する。ただし、$a^n_{j_h,i}(h=1,2,\cdots,Y)$、$a^n_{k_s,i}(s=1,2,\cdots,Z)$、$a^n_{lj,i}$、$a^n_{lk,i}$、$a^n_{ll,i}$ はそれぞれ各河道区分の下流端の通水断面積がその推定値から $\tilde{X}^n_{j_h}(h=1,2,\cdots,Y)$、$\tilde{X}^n_{k_s}(s=1,2,\cdots,Z)$、$\tilde{X}^n_j$、$\tilde{X}^n_k$、$\tilde{X}^n_l$ だけずれたときに対応して $A^n_{l,i}$ が変化するとしたときの回帰係数である。また、$b^n_{l,i}$ も横流入強度の予測誤差の推定値から $\tilde{p}^n$ だけずれたときに対応して $A^n_{l,i}$ が変化するとしたときの回帰係数である。

Yoshihiro SATOH, Michiharu SHIIBA

(1) 式を差分計算して時刻 $t_n$での河道区分 $L_l$ の各格子点での通水断面積の推定誤差$\tilde{A}^n_{l,i}$ から、時刻 $t_{n+1}$での河道区分 $L_l$ の各格子点での通水断面積の推定誤差$\tilde{A}^{n+1}_{l,i}$ への推移式が、以下のような形で得られる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^{n+1}_{l,0} \\ \vdots \\ \tilde{A}^{n+1}_{l,N} \end{bmatrix} = L_{L_l} \begin{bmatrix} \tilde{A}^{n}_{l,0} \\ \vdots \\ \tilde{A}^{n}_{l,N} \end{bmatrix} + \sum_{h=1}^{Y} D_{L_l,h}\tilde{X}^n_{j_h} + D_{L_l}\tilde{X}^n_j + \sum_{s=1}^{Z} S_{L_l,s}\tilde{X}^n_{k_s} + S_{L_l}\tilde{X}^n_k + M_{L_l}\tilde{p}^n + R_{L_l}v_n \qquad (4)$$

ここで、$L_{L_l}$ は $(N+1)\times(N+1)$ 次元の行列、$D_{L_l,h}$、$D_{L_l}$、$S_{L_l,s}$、$S_{L_l}$、$M_{L_l}$、$R_{L_l}$ は $(N+1)$ 次の列ベクトルである。(4) 式の最終行において、右辺第一項に (3) 式を代入すると、推定すべき状態量の推定誤差$\tilde{X}_l(t)$ の推移式が以下のような形で与えられる。

$$\tilde{X}^{n+1}_l = \phi_l\tilde{X}^n_l + \sum_{h=1}^{Y}\phi_{l_h}\tilde{X}^n_{j_h} + \sum_{s=1}^{Z}\psi_{l_s}\tilde{X}^n_{k_s} + \varphi_l\tilde{X}^n_j + \psi_l\tilde{X}^n_k + m_l\tilde{p}^n + \omega_l v_n \qquad (5)$$

よって、この流域の推定すべき状態量の推定誤差の推移式は、(2) 式、(5) 式より、

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{X}^{n+1}_l \\ \vdots \\ \tilde{X}^{n+1}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_n & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ m_l & \cdots & \psi_l & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ m_M & \cdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{p}^{n} \\ \vdots \\ \tilde{X}^{n}_l \\ \vdots \\ \tilde{X}^{n}_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \omega_l \\ \vdots \\ \omega_M \end{bmatrix} v_n \qquad (6)$$

と表すことができる。(6) 式は以下のように表される。

$$\Phi^{n+1} - \overline{\Phi}^{n+1} = F\left(\Phi^n - \overline{\Phi}^n\right) + Gv_n \qquad (7)$$

ここで、$F$は $(M+1)\times(M+1)$ 次元の行列、$G$ は $M+1$ 次の列ベクトルである。よって、時刻 $t_{n+1}$での推定誤差分散行列$\Psi^{n+1}$は、$\Psi^{n+1} = F\Psi^n F^T + G\mathrm{Var}\{v_n\}G^T$ により計算できる。ここで、Var{・}は{ }の中の確率変数の分散を表している。

以上のプロセスを繰り返し計算することにより、時刻 $t_n$から時刻 $t_{n+1}$へと洪水流出の確率予測を行うことができる。

**4 回帰係数の補正** ところで、(4) 式の $i$ 行目の式を以下のような形に表すことができる。

$$A^{n+1}_{l,i} = \overline{A}^{n+1}_{l,i} + \sum_{h=1}^{Y}\alpha^{n+1}_{l_h,i}\tilde{X}^{n+1}_{j_h} + \sum_{s=1}^{Z}\beta^{n+1}_{l_s,i}\tilde{X}^{n+1}_{k_s} + \alpha^{n+1}_{l,i}\tilde{X}^{n+1}_j + \beta^{n+1}_{l,i}\tilde{X}^{n+1}_k + \delta^{n+1}_{l,i}\tilde{p}^{n+1} + \theta^{n+1}_{l,i}v_n \qquad (8)$$

時刻 $t_n$のときの式形 (3) 式と比べると、右辺第 8 項が加わっている点が異なっている。このままでは時刻 $t_{n+1}$から時刻 $t_{n+2}$、時刻 $t_{n+2}$から時刻 $t_{n+3}$、…、といったように、直前の時間ステップの共分散行列を用いて次の時間ステップの共分散行列を次々と求めていくことができないので回帰係数の補正を行なう必要がある。まず、(4) 式の $i$ 行目の式から $A^{n+1}_{l,i}$の分散$\left(\sigma^{n+1}_{A_{l,i}}\right)^2$を求め、また、(8) 式の右辺第 8 項を無視したときの $A^{n+1}_{l,i}$の分散$\left(\sigma'^{n+1}_{A_{l,i}}\right)^2$を求める。次に、$\lambda_l = \dfrac{\sigma^{n+1}_{A_{l,i}}}{\sigma'^{n+1}_{A_{l,i}}}$ を計算して、

$$A^{n+1}_{l,i} = \overline{A}^{n+1}_{l,i} + \lambda_l\sum_{h=1}^{Y}\alpha^{n+1}_{l_h,i}\tilde{X}^{n+1}_{j_h} + \lambda_l\sum_{s=1}^{Z}\beta^{n+1}_{l_s,i}\tilde{X}^{n+1}_{k_s} + \lambda_l\alpha^{n+1}_{l,i}\tilde{X}^{n+1}_j + \lambda_l\beta^{n+1}_{l,i}\tilde{X}^{n+1}_k + \lambda_l\delta^{n+1}_{l,i}\tilde{p}^{n+1} \qquad (9)$$

と近似すればこの式の右辺の分散は$\left(\sigma^{n+1}_{A_{l,i}}\right)^2$ に等しくなる。よって、時刻 $t_{n+1}$では (8) 式の代わりに (9) 式を回帰式に採用することにする。(9) 式は、回帰誤差を無視することによる分散の変化量を回帰式の各項に配分することを意味しており、(3) 式と同じ形になったので洪水流出を時々刻々推定していくことができる。

**5 結語** 本研究では、洪水流出の確率論的な予測計算手法を示し、そのアルゴリズムを開発した。しかし、本研究は未だ緒についたばかりであり、以下のような課題が残っている。開発したアルゴリズムに従ってプログラムを作成して数値シミュレーションを行い、そのアルゴリズムの有効性を示し、さらには、時々刻々得られる流量観測値を利用して Kalman フィルター[4] による予測計算の修正 (filtering) を行なう状態推定のアルゴリズムを開発する。

## 参考文献


[1] Michiharu Shiiba, Xavier Laurenson and Yasuto Tachikawa : Real-time stage and discharge estimation by a stochastic-dynamic flood routing model, HYDROLOGICAL PROCESSES, *Hydrol. Process.* 14, 481-495 (2000)

[2] 高棹琢馬・椎葉充晴：洪水流出予測の基礎理論とサブルーチンパッケージ, 1984

[3] 一松信著：数値解析, 朝倉書店, 1997.

[4] Gelb,A. (ed.) : *Applied Optimal Estimation*, M.I.T. Press, 1974.