第I部門　新しい多重極積分方程式法による3次元静弾性クラック問題の解析

京都大学大学院　学生会員　○吉田研一
京都大学工学研究科　正会員　西村直志
福井工業大学工学部　フェロー　小林昭一

1　序

高速多重極法 (FMM) は Rokhlin により積分方程式の高速解法として提案され，未知数の多い問題に有利な数値計算の方法の一つである．しかし，複雑な問題や 3 次元においては多重極モーメントから局所展開係数への変換 (M2L) に多大な時間が必要となってしまう．これを軽減するために，基本解の積分表示に基づく新しい多重極法を Greengard & Rokhlin[1] が 3 次元 Laplace 方程式において提案した．著者らは [2, 3] において，多重極法により 3 次元静弾性クラック問題の解析を高速化することに成功している．そこで，本論文では Greengard & Rokhlin[1] の新しい多重極法を 3 次元静弾性クラック問題の解析に適用し，従来の多重極法と計算時間の比較を行なった．数値解法としては選点法，形状関数には区分一定要素を用いている．

2　定式化

S を R^3 の自分自身と交わらない滑らかな曲線とし，クラックと呼ぶ．S の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．3 次元静弾性クラック問題は次の境界値問題を求めることに帰着される．

$$\Delta^*\boldsymbol{u}=0 \text{ in } R^3\setminus\overline{S},\quad \boldsymbol{t}^{\pm}=0 \text{ on } S,$$
$$\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{u}^{\infty} \text{ as } |\boldsymbol{x}|\to\infty,\quad \boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{u}^{+}-\boldsymbol{u}^{-}=0 \text{ on } \partial S$$

ここに $\Delta^*,\boldsymbol{u},\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}^{\infty},\boldsymbol{\phi}$ はそれぞれ，Navier の演算子，変位，表面力，全空間での 3 次元静弾性方程式の解 (クラックがないときの変位場)，開口変位を表す．また，$\boldsymbol{t}^{\pm}$ の $+(-)$ は，S の法線が向いている方向 (反対側) からの S 上への極限を示す．この問題の解くべき積分方程式は

$$t_a^{\infty}(\boldsymbol{x})=-\text{p.f.}\int_S n_b(\boldsymbol{x})C_{abik}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$C_{cdjl}n_c(\boldsymbol{y})\phi_d(\boldsymbol{y})dS_y,\quad \boldsymbol{x}\in S\qquad(1)$$

でとなる．ここに，C_{ijkl} は弾性定数，$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は 3 次元静弾性方程式の基本解であり，

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{1}{8\pi\mu}\left(\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

と書ける．また p.f. $\int$ は発散積分の有限部分をあらわす．

3　従来の多重極法での基本解の展開

従来の多重極法 [2, 3] では基本解を次のように展開する．

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{1}{8\pi\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Big(F^S_{ij,n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})\overline{R_{n,m}}(\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})$$
$$+G^S_{i,n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})(\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})_j\overline{R_{n,m}}(\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})\Big)\quad(2)$$

ここに，$F^S_{ij,n,m},G^S_{i,n,m}$ は次の用に表される．

$$F^S_{ij,n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})=$$
$$\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\delta_{ij}S_{n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})_j\frac{\partial}{\partial x_i}S_{n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})$$

$$G^S_{i,n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}S_{n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})$$

また，$R_{n,m},S_{n,m}$ は原点 O からの点 $\boldsymbol{x}$ の極座標を (r,θ,ϕ) とすると，

$$R_{n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})=\frac{1}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}r^n,$$
$$S_{n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})=(n-m)!\,P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}\frac{1}{r^{n+1}}$$

と書ける．基本解の展開式 (2) を積分方程式 (1) に代入して，多重極法の運用に必要な多重極モーメントや局所展開係数の定式化を行なう．

4　新しい多重極法での基本解の展開

新しい多重極法のための基本解の展開を行う．$x_3>y_3$ のとき，[1] の数値積分公式を用いると，基本解は次のように評価することができる．

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{1}{8\pi}\sum_{p=1}^{s(\varepsilon)}\sum_{q=1}^{M(p)}\Big(W(p,q;\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})\mathcal{F}_{ij}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})$$
$$+(\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})_jW(p,q;\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})\mathcal{G}_i(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})\Big)\times$$
$$e^{-(\lambda_p/d)(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})_3+i(\lambda_p/d)((\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})_1\cos\alpha_q(p)+(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})_2\sin\alpha_q(p))}+\varepsilon$$
$$(3)$$

ここに，ε は誤差であり，$W(p,q;\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})$ は次のように与えられる．

$$W(p,q;\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})=$$
$$\frac{\omega_p}{M(p)d}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^me^{-im\alpha_q(p)}\sum_{n=|m|}^{\infty}(\lambda_p/d)^nR_{n,m}(\overrightarrow{O\boldsymbol{y}})$$

Ken-ichi YOSHIDA, Naoshi NISHIMURA, Shoichi KOBAYASHI

また，$\mathcal{F},\mathcal{G}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{ij}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}}) &= \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\delta_{ij} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}})_j \frac{\partial}{\partial x_i} \\
\mathcal{G}_i(\overrightarrow{O\boldsymbol{x}}) &= \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

で表される．式 (3) の $s(\varepsilon), M(k), \lambda_k$ は [1] で種々の精度に対して求められている．式 (3) を用いて新しい多重極法に必要な諸公式を求める．

5 数値実験

5.1 解析条件

数値解析では，$\boldsymbol{t}^\infty = (0,0,p_0)$ とし，式 (2) の無限和を有限個 (10 個) で打ち切っている．また，式 (3) においては $s(\varepsilon)=9$ とした．計算には Alpha21264 (500MHz) を CPU に 搭載した DEC 互換機を用いた．連立方程式の解法は前処理付きの GMRES である．

5.2 解析例

3 次元無限領域に半径 a_0 の円形平面クラックが 512 個 (総未知数 380,928) 存在する時の開口変位の解析を，従来の多重極法及び新しい多重極法で行なった．計算時間は，それぞれ 3680 秒，2376 秒であった．図 1 は半径で無次元化したクラックメッシュに無次元化した開口変位 $\mu\phi/p_0a_0$ を重ね合わせた図である．

6 結論

本論文では，新しい多重極法の 3 次元静弾性クラック問題への適用に成功し，従来の多重極法よりも高速に解析を行なうことに成功した．ここで提案した手法はクラック問題だけでなく，通常の境界値問題にも適用可能であり，様々な応用が可能である．

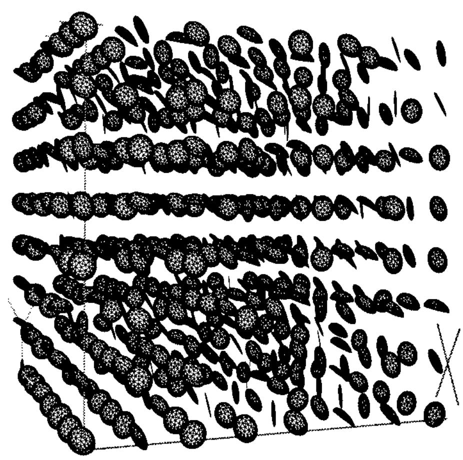

図 1: Crack opening displacement (総未知数 380,928)

参考文献

[1] L. Greengard and V. Rokhlin : A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions, Acta Numerica, **6**, 229–270, 1997.

[2] 吉田研一，西村直志，小林昭一：多重極積分方程式を用いた 3 次元静弾性クラック問題の解析，土木学会応用力学論文集，**1**, 365–372, 1998.

[3] K. Yoshida, N. Nishimura, S. Kobayashi : Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D, Int. J. Numer. Meth. Engng, **50**, 525–547, 2001.