第III部門　　粒状体の支持力解析に関する基礎的研究

京都大学工学研究科　正会員　田村　武
京都大学工学研究科　学生員　○山田 辰男

1. はじめに

砂や粉体などの粒状体の数値解析法には、連続体力学に基づく方法と粒子の集合体と見なす方法がある。本研究の主題とする方法は後者に属するもので、粒子を円形の剛体と仮定し，個々の要素に作用する力に着目し, 各要素の局所的な運動から要素全体の大局的な挙動を追跡する．全体の運動は摩擦のみに支配される粒子の「すべり」と「ころがり」によって生じるとして二次元の等半径粒状体モデルにおける剛塑性極限解析を行なった．

2. 解析方法

(1) 解析モデル

円形要素集合体が水平面上に図1のように x 軸から α の角度で規則的に配置されたモデルにおいて次のように仮定する．

- 要素-要素，要素-壁などの接触点は離れることはなく常に接触している．
- 接触点には軸力と，摩擦によるせん断力が働く．
- 各粒子は剛体であり，全体の運動は粒子の「すべり」と「ころがり」のみによって生じる．

本研究モデルは内部摩擦角 ϕ を考慮しない c 材料である．図1において載荷板を矢印の方向に速度 $\dot{\delta}$ で押した時の極限荷重 P とその時の崩壊のメカニズムを決定することを主たる目的とする．

(2) 2要素の場合

最も簡単な2つの剛体要素の崩壊メカニズムについて考察する．図2のような等しい半径をもつ2つの円形剛体要素の粒子が x 軸から一定の角度 α で接触しているとする．要素 i には x, y 方向の移動 ($\dot{u}_i, \dot{v}_i$ なる速度場), 回転 ($\dot{\theta}_i$) の3つの自由度が存在する．粒子2は y 軸に平行な載荷板により荷重 P のもとで一定変位速度 $\dot{\delta}$ を受け，接触を保って準静的に運動する．ここで要素間の相対すべり速度を考え，変形の適合条件を求める．つりあい式を満たす任意の系と適合条件式を満たす任意の速度場に対して仮想仕事の式が一般に成り立つ．

(3) 上界定理

ここで載荷板を一定の変位速度 $\dot{\delta}$ で移動させるために必要な外力 P を決定するような問題を考える．極限荷重 P は速度場の関数として求められ，任意に選んだ速度場の関数として決定された極限荷重 P は真のメカニズムにおける極限荷重 P^* の上界値であり，この上界値を最小化することがこの問題の正解値を得ることである．上界値の最小化には線形計画法を用いる．また P の最小化は，軸力 N_j とせん断力 T_j のもとでつりあい条件と等価であることが田村 [1][2] らの研究により分かっている．

3. 解析結果

要素の接触角 $\alpha = 45^\circ$ のとき，縦，横の要素数が m, n，載荷板に接する要素数が n' のときの極限荷重 P を m, n, n' の関数として「$P = P(m, n, n')$」と表現する．縦，横の要素数が等しく $k = m = n$ のときの解析による極限荷重値を表1に示す．いま最も簡単な4要素では図3のようなメカニズムを生じる．印の付いた接触点ではすべりが生じ，せん断強度 $C_p = 1$ が発揮されている．このすべり点をもとにしてつりあい式を解くことにより各接触点における軸力，せん断力を順次計算したものが図4である．このとき極限荷重は，要素どうしの粘着力を C_p として

$$P(2,2,1) = (1+\sqrt{2})C_p \tag{1}$$

と求められる．同様に16要素でのメカニズムを図5, 6に示す．このときの極限荷重はそれぞれ

$$P(4,4,1) = (1+\frac{7}{2}\sqrt{2})C_p \tag{2}$$

$$P(4,4,2) = (1+5\sqrt{2})C_p \tag{3}$$

と求められる．ただしつりあい式を解く過程で軸力の一部に負の値，すなわち引っ張りを生じたものもあるが，つりあい式を満たす限り負の値も許されるとした．表1を参考にすると P は

$$P(k,k,n') = (1+\rho\sqrt{2})C_p \tag{4}$$

Takeshi TAMURA, Tatsuo YAMADA

の形式で決定されることが分かり，この形式を用いた P の値を表2に示す．ここで表2に注目すると，帰納的に P は以下の式で決定されることが分かる．

$$P(k,k,n') = \{1 + \frac{2(\frac{k}{2})^2 - 2n'^2 + 4n' - 3}{\frac{k}{2} - n' + 1}\sqrt{2}\}C_p \quad (5)$$

この式で表される表2と数値解の表1は完全に一致していることが確認できる．

4. 本研究のまとめ

図1のように規則的に配置した場合，すべりが生じた接触点からつりあい式を解くことにより極限荷重の理論解が求められ，その値と数値解は一致することが分かった．今後，軸力に負の値が生じた場合，その接触点における接触条件をはずすことを検討する予定である．

参考文献

[1] Tamura, T & Yamada, Y : A Rigid-Plastic Analysis for Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. 36, No.3, pp. 113-121, 1996.

[2] 田村武，小池渉，櫻井義之：剛体要素からなる粒状体の上界法とその応用，応用力学論文集, Vol.1, pp. 407-416 1998.

表1：極限荷重値 P(数値解)

m,n/n'	1	2	3	4	5
2,2	2.41	-	-	-	-
4,4	5.95	8.07	-	-	-
6,6	9.01	11.60	13.72	-	-
8,8	11.96	14.59	17.26	19.38	-
10,10	14.53	17.37	20.33	22.92	25.04

表2：極限荷重値 P(理論解)

m,n/n'	1	2	3	4	5
2,2	$1+\sqrt{2}$	-	-	-	-
4,4	$1+\frac{7}{2}\sqrt{2}$	$1+5\sqrt{2}$	-	-	-
6,6	$1+\frac{17}{3}\sqrt{2}$	$1+\frac{15}{2}\sqrt{2}$	$1+9\sqrt{2}$	-	-
8,8	$1+\frac{31}{4}\sqrt{2}$	$1+\frac{29}{3}\sqrt{2}$	$1+\frac{23}{2}\sqrt{2}$	$1+13\sqrt{2}$	-
10,10	$1+\frac{49}{5}\sqrt{2}$	$1+\frac{47}{4}\sqrt{2}$	$1+\frac{41}{3}\sqrt{2}$	$1+\frac{31}{2}\sqrt{2}$	$1+17\sqrt{2}$

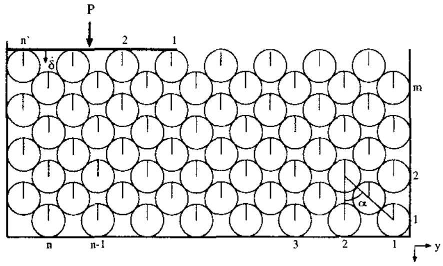

図1：初期状態

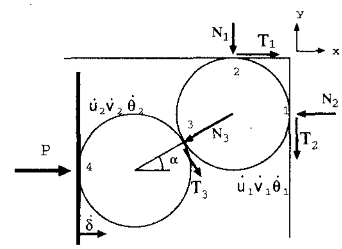

図2：2つの円形要素

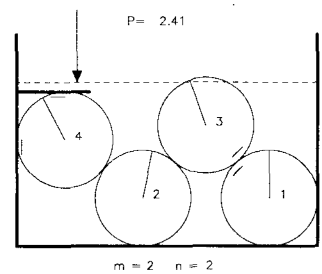

図3：4要素のメカニズム

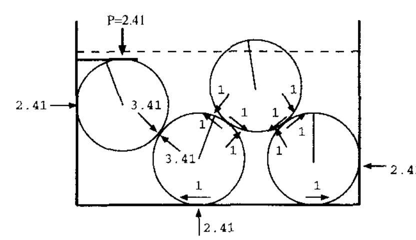

図4：4要素の力のつりあい

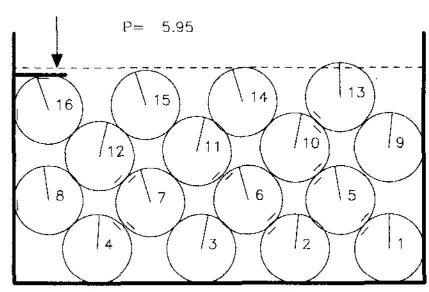

図5：16要素のメカニズム1

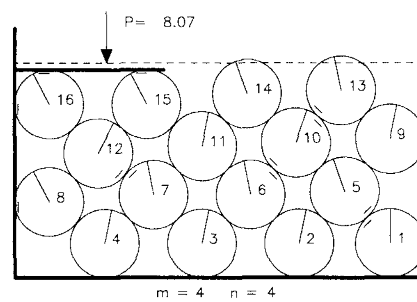

図6：16要素のメカニズム2