

1. はじめに

近年、地下水の塩水化・産業廃棄物などによる汚染が全国各地で問題になっている。これらを数値的に解析する手法は数多く提案されているが、基礎式が非線型であるため安定した計算結果を得ることは容易ではない。ここでは、安定化のためにBTD法と上流化法を導入した有限要素法について検討する。さらに、鉛直2次元塩水浸入(Henry問題)を例にとり、計算精度を吟味した後、本手法を高知県春野町の塩水化問題に適用する。

2. 基礎式

地下水流動の基礎式にRichards式(1)を用いる。

$$C(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\phi) \nabla \phi) + q \quad (1)$$

ここに、 ϕ :全水頭、 C :比水分容量、 K :透水係数、 q :外部からの流入量である。

汚染物質の移流拡散に関する基礎式は(2)式で表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \nabla \cdot (D \nabla C) + M(C) \quad (2)$$

である。ここに、 C :汚染物質の濃度、 D :分散係数テンソル、 $M(C)$:外部からの流入もしくは内部生成量である。 $\mathbf{v}$ は実流速ベクトルであり、(3)式で表される。

$$\theta \mathbf{v} = -K(\phi) \{ \nabla \psi + \delta (1 + C_s C) \} \quad (3)$$

ここに、 ψ :圧力水頭、 θ :土壌水分量、 δ は鉛直方向余弦、 C_s は汚染水の密度を ρ_s 、水の密度を ρ_w とすると、 $C_s = \rho_s / \rho_w - 1$ で表される定数である。

3. 基礎式の離散化

(1)式の離散化については、通常のガラーキン法と同等であるので、ここでは省略する。(2)式については、セルペクレ数($Pe = \Delta s \cdot v / D$, v :流速、 D :拡散係数、 Δs :要素の大きさ等の代表長)が大きくなる場合、安定な解を得ることは困難になるといわれている¹⁾。地下水汚染問題では、流速はそれほど大きくないが、分散係数が非常に小さくかつ広大な領域を解析する場合には要素分割が大きくなるため、局所的に高ペクレ数が発生し、計算が不安定になる。そこで、ここではBTD(Balancing Tensor Diffusivity)法と上流化法を用いる安定化有限要素法について検討を加える。

3.1 BTD法

BTD法¹⁾は差分法のLax-Wendroff法に対応しており、時間微分を2次精度にして安定性を向上させる上流化手法である。BTD法を用いて(2)式を離散化すると(4)式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} + \mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla C^{n+1} \\ &= \nabla \cdot (D \nabla C^{n+1}) - M^{n+1} + BTD^{n+1} \end{aligned} \quad (4)$$

式中のBTDは、誘導の詳細は省略するが最終的に式(5)で表される。

$$BTD = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right) = \nabla \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla C \quad (5)$$

ここに $\mathbf{K}$ は $(\Delta t/2) \mathbf{v} \mathbf{v}$ で表される数値拡散係数である。

3.2 ハイブリッド上流化法

ハイブリッド上流化法¹⁾は形状関数に定常移流拡散方程式、重み関数に随伴定常移流拡散方程式の局所厳密解(要素内で流速・拡散係数一定とした厳密解)を用いる手法である。計算空間における四角形要素の形状関数 L_a と重み関数 L_a^* は、それぞれ(6)(7)式となる。

$$L_a = \frac{\xi_a}{2} \frac{e^{\lambda \xi} - e^{-\lambda \xi_a}}{\sinh \lambda} \cdot \frac{\eta_a}{2} \frac{e^{\mu \eta} - e^{-\mu \eta_a}}{\sinh \mu} \quad (6)$$

$$L_a^* = \frac{\xi_a}{2} \frac{e^{\lambda \xi_a} - e^{-\lambda \xi}}{\sinh \lambda} \cdot \frac{\eta_a}{2} \frac{e^{\mu \eta_a} - e^{-\mu \eta}}{\sinh \mu} \quad (7)$$

ここに λ , μ :それぞれ各軸方向のセルペクレ数の半値、 ξ_a, η_a はそれぞれ $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} = \{-1, 1, 1, -1\}$, $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\} = \{-1, -1, 1, 1\}$ である。これらを用いて(2)式を離散化する。

3.3 解析精度

ここで示した安定化有限要素法の妥当性を検証するため、Henry問題を解く³⁾。計算結果を通常のガラーキン法とSegol-Pinder-Grayの解とともに図1に示す。既存解とここでの計算結果を比較すると良く合致しているのが分かる。ガラーキン法ではわずかながら振動が生じているが、上流化法を導入することで回避できた。なお、ここで算出されたセルペクレ数の最大値は約30であった。

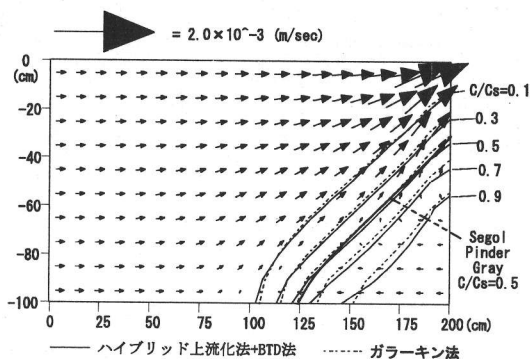


図1 Henry問題の既存解と数値解の比較(100分後)

4. 高知県春野町への適用

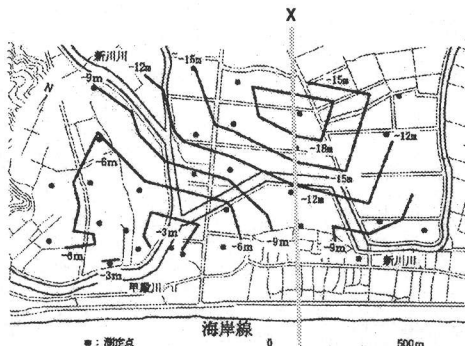


図2 解析断面の位置と塩水層の深さ
(高知県春野町, 1998年8月)

地下水の塩水化被害を経験し、現在も問題を抱える高知県春野町に本手法を適用する。図2に1998年8月に実施された電気探査による塩水層の深さ²⁾を示す。本研究の計算領域は、図2に示してある x 断面の地表面から標高-50mまでとする。なお、 x 断面は海岸線より陸側に1.2km、海側に300mの計1.5kmである。

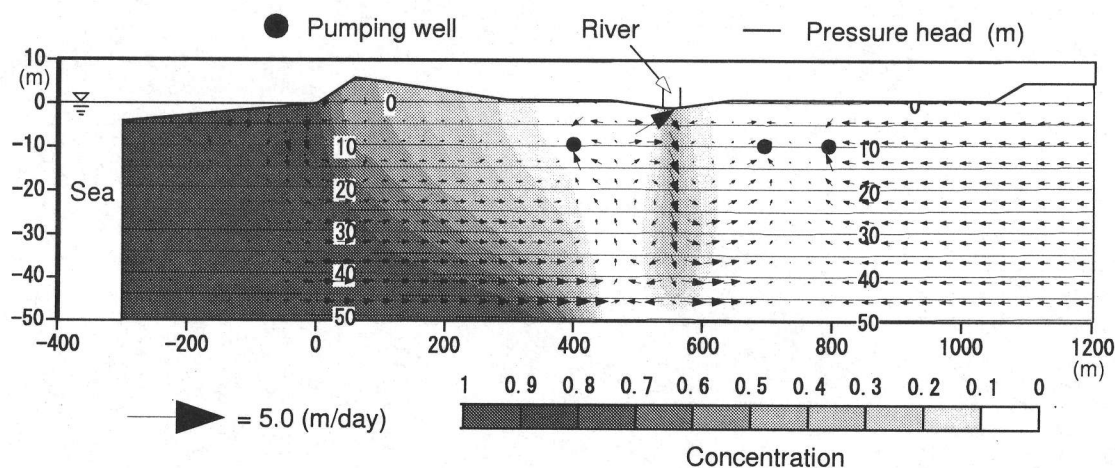


図3 計算結果(200日後)

上流端は地下水位0.5m、濃度0.0であると仮定し、海側は潮位0.0m、濃度1.0、河川は河床標高-1.0m、水深1.0m、濃度0.5とした。他の境界の取扱いはHenry問題と同様である。また、海岸線より陸側に400, 700, 800mに揚水井戸を設置し、5.0m/dayで揚水した。なお、ストレーナの位置を図3の黒丸で示してある。拡散係数は実際のものよりかなり大きい5.0m²/dayとし、透水係数は飽和領域で204m/day、 Δt は1日とした。200日後の計算結果を図3に示す。図2の観測結果と比較すると、塩水浸入状況をおおまかに再現できていることが分かる。また、ここで算出されたセルペクレ数の最大値は約10であり、ガラーキン法では発散し解が得られなかった。

5. まとめ

本研究では安定化有限要素法を用いた地下水への塩分浸入解析を行い、その有用性を検討した。その結果、上流化手法を用いることにより、高ペクレ領域でも安定に解析できることが分かった。その反面、要素分割によっては誤差が大きくなることが判明し、現象に適した要素分割が必要であるといえる。

参考文献

- 1) 棚橋 隆彦:流れの有限要素法I-II, 朝倉書店, 1997.
- 2) 岡, 大年, 松田, 神野, 杉尾, 石井:地下水環境汚染の実態調査と対策に関する研究(共同研究報告), 京都大学防災研究所, pp.1-47, 1999.
- 3) Segol G., G.F. Pinder and W.G. Gray: A Galerkin-Finite Element Technique for Calculating the Transient Position of the Saltwater Front, Water Resources Research, Vol.11, No.2, pp.343-347, 1975.
- 4) 日本数値流体力学会 有限要素法研究委員会:有限要素法による流れのシミュレーション, 1998.