3次元定常Stokes流れ問題に対する高速多重極積分方程式法の定式化とその浸透流解析への適用

京都大学大学院　非会員　高橋徹
京都大学大学院　非会員　浪江雅幸
京都大学工学研究科　正会員　○西村直志
福井工業大学工学部　フェロー　小林昭一

1 緒言

境界積分方程式法 (BIEM) は，多重極法 (FMM) の発展によって超大型境界値問題の解法として見直されている．多重極法は，N 個の未知数を含む問題を $O(N)$ のメモリと $O(N)$ の計算時間で解くことを可能にした．一方，Stokes流れ問題においては透水問題の様に，非常に複雑な境界形状を取り扱う必要が生ずる場合があり，超大型問題の高速解法を開発することは重要である．そこで本研究の目的は，3次元定常Stokes流れ問題に対する高速多重極積分方程式法 (FMBIEM) の定式化を行い，それを浸透層における流れ問題に適用することである．

2 3次元定常非圧縮流れ問題に対するFMBIEMの定式化のあらまし

直交直線座標 $O-x_1x_2x_3$ 系に準拠した定常Stokes流れ問題の基礎方程式系は以下である．

$$\text{連続式}\quad u_{j,j}=0,\qquad \text{運動方程式}\quad \mathrm{Re}\, u_j u_{i,j}-\tau_{ij,j}-f_i=0,\qquad \text{構成式}\quad \tau_{ij}=-\mathrm{Re}\, p\delta_{ij}+u_{i,j}+u_{j,i} \tag{1}$$

ここに，u_i，τ_{ij}，f_i，p は無次元化された流速ベクトル，応力テンソル，外力ベクトル，圧力であり，Re は Reynolds 数である．ここで，運動方程式から圧力 p を消去して，流速 u_i だけを変数とする方程式を導くために，

$$p=-\lambda u_{i,i} \tag{2}$$

とおく．このとき運動方程式は，構成式も用いて，

$$u_{i,jj}+(1+\mathrm{Re}\lambda)u_{j,ji}+(f_i-\mathrm{Re}u_j u_{i,j})=0 \tag{3}$$

と書ける．式(2)の係数 λ の大きさを，有限の大きさの圧力 p に対して十分に大きくとれば，$u_{i,i}$ を 0 に近づけることができるので，Stokes流れ問題では連続式の代わりに式(2)を使って $\lambda\to\infty$ の極限であると考えてよい．さらに，線形化して慣性項 $u_j u_{i,j}$ を落とせば，式(3)は次の線形静弾性問題と同形の支配方程式に帰着する．

$$\mu u_{i,jj}+(\mu+\lambda)u_{j,ji}+f_i=0 \tag{4}$$

ここに，μ，λ は Lamé 定数である．したがって，3次元定常Stokes流れ問題に対するFMBIEMの定式化は，式(4)に対して西村らが開発したFMBIEM[1, 2]の諸公式に極限操作 $\lambda\to\infty$ を施せばよい．その基礎は，式(4)に対する境界積分方程式

$$\frac{1}{2}u_i(x)+\int_S (T_{ij}(x,y)u_j(y)-\Gamma_{ij}(x-y)t_j(y))\,dS_y=0\qquad x\in S \tag{5}$$

において，境界 S の部分 S_0 に対して $|\overrightarrow{Ox}|>\max_{y\in S_0}|\overrightarrow{Oy}|$ が成り立つとき，S_0 上の積分を

$$\int_{S_0}(T_{ij}(x,y)u_j(y)-\Gamma_{ij}(x-y)t_j(y))\,dS_y=\frac{1}{8\pi\mu}\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=-N}^{N}(\overline{F^S_{ip,N,M}}(\overrightarrow{Ox})M_{p,N,M}(O)+\overline{G^S_{i,N,M}}(\overrightarrow{Ox})M_{N,M}(O)) \tag{6}$$

と評価することにある．ここで，n_i を境界外向き単位法線，C_{ijkl} は弾性定数テンソルとすると，$t_i=C_{ijkl}u_{k,l}n_j$ は表面力，Γ_{ij} と T_{ij} は基本解とその二重層核，$M_{p,N,M}(O)$ と $M_{N,M}(O)$ は O を原点とする多重極モーメント，$F^S_{ip,N,M}$ と $G^S_{i,N,M}$ はその係数である．これらは $\lambda\to\infty$ の場合，δ_{ij} を Kronecker のデルタ，$r=|\overrightarrow{xy}|$ とすると，

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}(x-y) &= \frac{1}{8\pi\mu}\left(\delta_{ij}\partial^y_l\partial^y_l-\partial^y_i\partial^y_j\right)r,\\
T_{ij}(x,y) &= \frac{1}{8\pi}\left\{(\delta_{ip}-(\overrightarrow{Ox})_p\partial^x_i)(\delta_{pj}\partial^y_l n_l+\partial^y_j n_p)\frac{1}{r}+\partial^x_i\left((\overrightarrow{Oy})_l\partial^y_j+(\overrightarrow{Oy})_j\partial^y_l\right)\frac{n_l}{r}\right\},
\end{aligned}$$

Toru TAKAHASHI, Masayuki NAMIE, Naoshi NISHIMURA, Shoichi KOBAYASHI

$$
\begin{aligned}
M_{p,N,M}(O) &= \int_{S_0}\left(n_p u_j \partial_j^y R_{N,M} + u_p n_k \partial_k^y R_{N,M} - t_p R_{N,M}(\overrightarrow{Oy})\right) dS_y,\\
M_{N,M}(O) &= \int_{S_0}\left(n_k(\overrightarrow{Oy})_k u_j \partial_j^y R_{N,M} + u_j(\overrightarrow{Oy})_j n_k \partial_k^y - t_p(\overrightarrow{Oy})_p R_{N,M}(\overrightarrow{Oy})\right) dS_y,\\
F^S_{ip,N,M}(\overrightarrow{Ox}) &= \delta_{ip} S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) - (\overrightarrow{Ox})_p \partial_i^x S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}), \qquad G^S_{i,N,M}(\overrightarrow{Ox}) = \partial_i^x S_{N,M}(\overrightarrow{Ox})
\end{aligned}
$$

となる．ここに，$R_{N,M}(\overrightarrow{Ox})$ と $S_{N,M}(\overrightarrow{Ox})$ は，$\overrightarrow{Ox}$ を極座標 (r,θ,ϕ) で表して，P_N^M を Legendre 陪関数とすると，

$$
R_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) = \frac{1}{(N+M)!} P_N^M(\cos\theta) e^{iM\phi} r^N, \qquad S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) = (N-M)! P_N^M(\cos\theta) e^{iM\phi} \frac{1}{r^{N+1}}
$$

と計算される．式(6)を基にして多重極法アルゴリズムを構成し，それに式(5)の離散行列の反復解法を組み合わせることによって，式(5)の高速解法が得られる．この定式化の妥当性は，厳密解の存在する問題における予備解析によって確認した．

3 浸透流解析への応用

図1左は，透水係数を測定するための実験系のモデルを表している．数値解析では図1右上のように流体部から立方体を取り出し，その内部の領域を解析の対象とした．内部には，前後・上下・左右に整列した球面が角度 δ (図1右下を参照) で接合した境界を設け，実際の土粒子を模擬した．

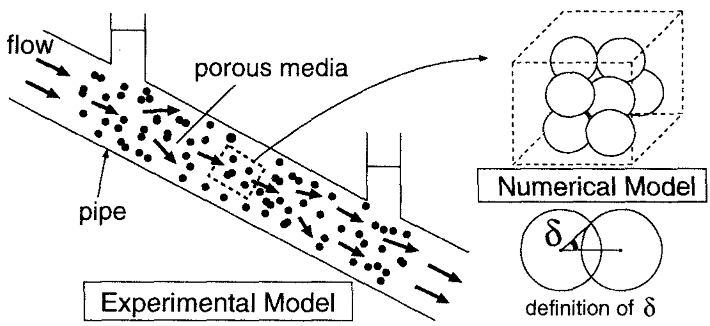

図1. 透水係数を求めるための実験・数値モデル / 角度 δ の定義

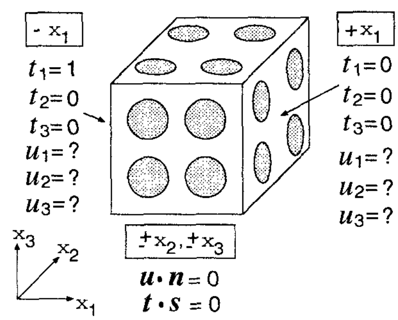

図2. 側面の境界条件

境界条件は，土粒子の表面で流速を0とし，立方体の側面では図2のように x_1 軸方向に差が1となるように表面力を与え，その他の面には法線方向の流速成分を0，接線方向の表面力を0とした．土粒子を $c \times c \times c$ $(c = 2,3,4,5$ あるいは $6)$ に配置し，それぞれ δ を $15°, 30°, 40°$ とした組合わせについて解析を行い，各ケースにおいて $\pm x_1$ 面で得られる流速データから透水係数 k を求めた．なお，$c = 6$ の場合に用いた境界要素メッシュは図3の通りである(内部の様子がわかるように側面の手前部を除外してある)．図4は土粒子数 $I\ (= c^3)$ に対して k をプロットしたものである．I または δ が大きくなるほど，すなわち土粒子が密になるほど k の値は小さくなっており，定性的に矛盾しない結果が得られた．

4 結言

3次元定常Stokes流れ問題に対するFMBIEMの定式化を行った．本手法によって自由度が数十万規模の浸透流問題も解析可能となり，ここで得られた結果も合理的であった．

今回は土粒子が規則的に配置したモデルを解析したが，配置のパターンを変化させることにより，より実際問題に適応した浸透流解析も可能である．

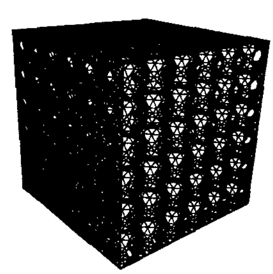

図3. メッシュ (150,336 DOF)

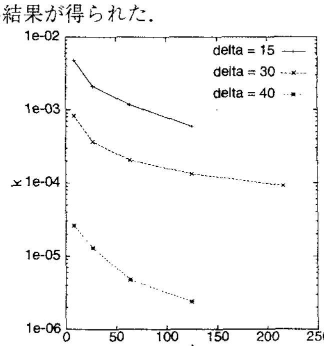

図4. 粒子数 I − 透水係数 k

参考文献

[1] 吉田, 西村, 小林：多重極積分方程式法を用いた3次元静弾性クラック問題の解析, 応用力学論文集, 1 (1998), pp.365–372.

[2] 高橋, 西村, 小林：改良型円錐孔底応力解放法への多重極積分方程式の適応, 境界要素法論文集, 15 (1998), pp.105–109.