第 I 部門　　新しい多重極積分方程式法による 3 次元クラック問題の解析

京都大学大学院　学生会員　○吉田研一
京都大学大学院　非会員　宮越優
京都大学工学研究科　正会員　西村直志
福井工業大学工学部　フェロー　小林昭一

1　序

多重極法 (FMM) は Rokhlin により積分方程式の解法として提案され，未知数の多い問題に有利な数値計算の方法の一つである．しかし，複雑な問題においては多重極モーメントから局所展開係数を求める計算 (M2L) に多大な時間が必要となってしまう．この問題を解決すべく Hrycak & Rokhlin[1] は 2 次元 Laplace 方程式において，基本解の積分表示に基づく新しい多重極法を提案した．また Greengard & Rokhlin[2] は，これを 3 次元に拡張した．本論文では Greengard & Rokhlin[2] の多重極法を 3 次元 Laplace クラック問題に適用し，従来の多重極法との計算時間の比較を行なった．その際，数値解法としては選点法，形状関数には区分一定要素を用いている．

2　定式化

S を R^3 の自分自身と交わらない滑らかな曲線とし，クラックと呼ぶ．S の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．3 次元 Laplace クラック問題は次の境界値問題を求めることに帰着される．

$$\Delta u = 0 \text{ in } R^3 \setminus S, \quad \frac{\partial u^\pm}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ on } S, \quad u \to u_\infty \text{ as } |\boldsymbol{x}| \to \infty$$

ここに u は未知関数で u_∞ は全空間での Laplace 方程式の解，すなわちクラックがないときの解，$u^\pm$ の $+(-)$ は，S の法線が向いている方向 (反対側) からの S 上への極限を示す．この問題の解くべき積分方程式は

$$-\frac{\partial u_\infty(\boldsymbol{x})}{\partial n_x} = \text{p.f.} \int_S \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_x \partial n_y} \phi(\boldsymbol{y}) dS_y \qquad (1)$$

でとなる．ここに，G は 3 次元 Laplace 方程式の基本解，ϕ は開口変位でありそれぞれ，

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \frac{1}{4\pi r}, \quad \phi = u^+ - u^-$$

と書ける．

3　基本解の展開 I

多重極法を適用するために基本解の展開を行なう．基本解の展開は

$$\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \overline{S_{n,m}}(\overrightarrow{Ox}) R_{n,m}(\overrightarrow{Oy}), \quad |Ox| > |Oy| \quad (2)$$

と書ける．$\overline{\cdot}$ は $\cdot$ の複素共役を意味する．ここで，$S_{n,m}, R_{n,m}$ は原点 O からの点 x の極座標を (r,θ,ϕ) とすると，

$$R_{n,m}(\overrightarrow{Ox}) = \frac{1}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} r^n,$$

$$S_{n,m}(\overrightarrow{Ox}) = (n-m)!\, P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \frac{1}{r^{n+1}}$$

と書ける．P_n^m はルジャンドル陪関数である．この級数展開を用いて，多重極法に必要な諸公式を求める．

4　基本解の展開 II

次に新しい多重極法のための基本解の展開を行う．$z > 0$ のとき，基本解は次のように積分表示される．

$$\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\rho z} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{ix\rho\cos\theta + iy\rho\sin\theta} d\theta d\rho \qquad (z > 0) \quad (3)$$

(3) の二重積分に文献 [2] の数値積分公式を用いると，基本解は次のような二重和で評価することができる．

$$\frac{1}{4\pi r} \approx \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{M(k)} \frac{\omega_k}{4\pi M(k)} e^{-\lambda_k z + i\lambda_k (x\cos\alpha_j + y\sin\alpha_j)},$$

$$\alpha_j = \frac{2\pi j}{M(k)} \quad (4)$$

ここに，$s, M(k), \lambda_k$ は [2] で種々の精度に対して求められている．この二重和を用いて新しい多重極法に必要な諸公式を求める．

5　数値解析例

クラックは半径 1 の円形平面クラックで，$u_\infty = x_3$ とし，(2) の無限和を有限個 (10 個) で打ち切っている．(4) 式に含まれる指数展開の項数は $s = 9$ とした．計算には Alpha21264 (500MHz) を CPU に搭載した DEC 互換機を用いた．連立方程式の解法は前処理付きの GMRES である．

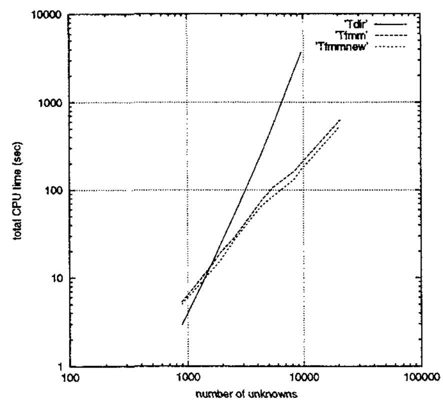
Ken-ichi YOSHIDA, Masaru MIYAKOSHI , Naoshi NISHIMURA, Shoichi KOBAYASHI

5.1 単一のクラックの場合

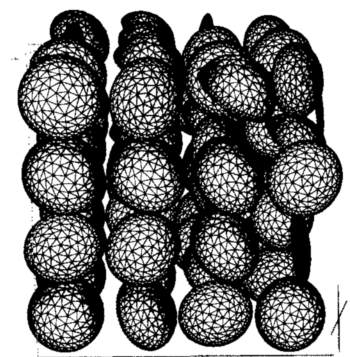
まず，単一クラックの解析を行なった．図1(a)に直接法('Tdir')，従来の多重極法('Tfmm')，新しい多重極法('Tfmmnew')による計算時間をプロットした．図1(a)からわかるように，単一クラックの場合，M2Lの計算量がそれほど多くないため，新しい多重極法の効果はさほど出ず，少し速くなった程度である．

5.2 複数のクラックの場合

次に，クラックを複数並べた場合の解析を行なった．一つのクラックの要素数は472個である．表クラックを複数並べた場合，単一の場合よりも境界要素が密に存在するので，M2Lの計算量が増え，新しい多重極法の効果が大きい．また，図1(b)はクラックが64個存在するときの開口変位をプロットしたものである．



(a) 計算時間の比較



(b) クラックの開口変位

図 1: 新しい多重極法による解析結果

表 1: 従来の多重極法と新しい多重極法の計算時間の比較

クラック数	未知数	従来の多重極法 (秒)	新しい多重極法 (秒)	比
64(4×4×4)	30208	1690	1056	1.6
512(8×8×8)	241664	16744	9849	1.7

6 結論

本論文では，新しい多重極法による積分方程式法を3次元Laplace方程式のクラック問題に適用することができ，従来の多重極法より高速で，かつ精度の面もほぼ同程度であった．今後は，弾性学へ拡張していきたい．

参考文献

[1] T. Hrycak and V. Rokhlin, 'An Improved Fast Multipole Algorithm for Potential Fields', SIAM J. Sci. Comp., **19**, 1804–1826, 1998.

[2] L. Greengard and V. Rokhlin, 'A New Version of the Fast Multipole Method for the Laplace Equation in Three Dimensions', Acta Numerica, **6**, 229–270, 1997.