第II部門　モンテカルロ実験による両側有界極値分布の特性評価

京都大学大学院　学生員　○土佐　香織　京都大学防災研究所　正員　宝　馨
京都大学工学部　学生員　荒木　一弘

1　はじめに　筆者らは，水文頻度解析において，上下限値を持つ確率分布の導入を考えてきた[1]．本研究では，両側有界極値分布の持つ性質を明らかにする．さらに，モンテカルロ実験を行うことによって，T年確率水文量の推定精度がどのようになるのかを定量的に検討する．

2　規準化によるEVLUB分布の特性評価　両側有界極値分布，EVLUB (Extreme Value with Lower and Upper Bounds) 分布は，神田 (1981) によって，地震動や風速の最大荷重強度を表すための確率分布として提案された．それは次式のように表される[2]．

$$F(x) = \exp\left[-\left\{\frac{g-x}{\nu(x-a)}\right\}^{\kappa}\right] \tag{1}$$

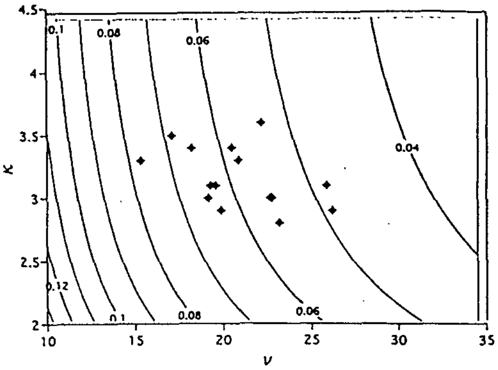
ここに $F(x)$ は分布関数，a，g はそれぞれ変量の下限値および上限値，ν は尺度母数，κ は形状母数である．

このEVLUB 分布に対して規準化を行う．すなわち，X を変量，Y を規準化変量として，

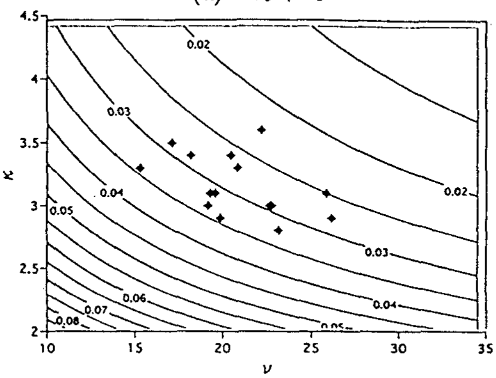
$$Y = \frac{X-a}{g-a} \tag{2}$$

の変換を行う．規準化を行うと，Y の上限値は1，下限値は0となる．この規準化領域において，ν，κと，3つの基本統計量，母平均 (μ^*)・母標準偏差 (S^*)・母ひずみ (C_s^*) の関係を数値解析的に求めた結果を図1に示す．それと同じ平面上に実際の極値雨量データに対するν，κの母数推定値もプロットした．このとき，上限値としては，日本の豪雨記録に基づくPMP (Probable Maximum Precipitation，可能最大1日雨量1576mm，同2日雨量2359mm，同3日雨量2988mm)[3] を用い，下限値は0とした．また，他の2母数 ν，κ は最尤法で推定した．この図から，極値雨量データより推定される母集団は μ^* が0.04から0.08，S^* が0.020から0.035，C_s^* が3.0から4.5 の範囲内にあることが分かる．ただし，これらの母集団に対する統計量は，たかだか100個程度の大きさの標本から得られる標本統計量とは一致しないことに注意する必要がある．

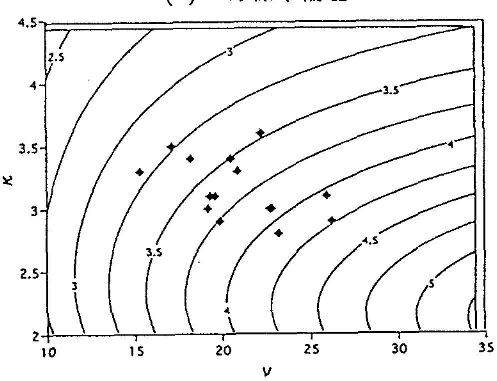
また，実領域での基本統計量，平均 μ，標準偏差 S，ひずみ C_s と規準化領域でのそれにあたる μ^*，S^*，



(a)　母平均



(b)　母標準偏差



(c)　母ひずみ

図1　母集団統計量と母数推定値

C_s^* との間には，$\mu = (g-a)\mu^* + a$，$S = (g-a)\cdot S^*$，$C_s = C_s^*$の関係がある[4]．

3　数値実験によるEVLUB分布の評価　以下の手順で評価する．

Step1) 母集団を想定する．すなわち，母集団の確率

表1　100年確率水文量の相対誤差 C_v の比較

	N=10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
対数正規分布	*****	0.4550	0.2334	0.1837	0.1603	0.1417	0.1322	0.1205	0.1136	0.1071	0.0733	0.0454	*****
Gumbel分布	0.1733	0.1223	0.0975	0.0841	0.0751	0.0686	0.0632	0.0590	0.0559	0.0518	0.0370	0.0234	0.0166
Case1	0.3077	0.2179	0.1750	0.1509	0.1353	0.1237	0.1139	0.1066	0.1007	0.0932	0.0669	0.0422	0.0299
Case2	0.3268	0.2309	0.1854	0.1598	0.1433	0.1309	0.1205	0.1129	0.1066	0.0986	0.0707	0.0446	0.0317
Case3	0.3463	0.2441	0.1960	0.1688	0.1527	0.1383	0.1273	0.1193	0.1127	0.1041	0.0747	0.0471	0.0334
Case4	0.3624	0.2550	0.2044	0.1761	0.1578	0.1442	0.1326	0.1243	0.1174	0.1085	0.0778	0.0491	0.0349

分布と母数を仮定する．

Step2) 母集団から大きさ N の標本を抽出する．すなわち，仮定した分布に従う乱数を N 個発生させる．

Step3) 発生させた標本に対して，最尤法により母数を推定し，確率水文量を推定する．

Step4) Step2) と **Step3)** を M 回繰り返し，確率水文量の推定値の相対誤差 (C_v) を算定する．

この作業をモンテカルロ実験と呼ぶ．T年確率水文量は非超過確率$p = 1 - 1/T$に対応する水文量である．C_v は，T 年確率水文量の平方根平均平方誤差 (RMSE, root mean square error) を真値で除した値で，小さいほど良い推定と言える．ある統計量 θ の推定量 $\hat{\theta}$ に関する MSE は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE} &= \mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta}-\mathrm{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)^2\right]+\left(\mathrm{E}\left[\hat{\theta}\right]-\theta\right)^2 \\ &= \mathrm{Var}\left[\hat{\theta}\right]+\left\{\mathrm{Bias}\left[\hat{\theta}\right]\right\}^2 \end{aligned} \tag{3}$$

ここに，E[•] は期待値操作を，Var[•]，Bias[•] は，それぞれ分散，偏りを示す．すなわち，MSE は，推定量 $\hat{\theta}$ のばらつき具合 Var と偏りの大きさ Bias の二乗の和で表されるものであり，この値が小さいほど良い推定だといえる．この MSE の平方根をとったものが RMSE である．ここで，N=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 500, 1000とする．また試算の結果，M=5000とすることにした．

表1 に，EVLUB 分布を用いて母ひずみが3.25, 3.50, 3.75, 4.00となるCase1, Case2, Case3, Case4 と，対数正規分布・Gumbel 分布を用いた場合の C_v の値を示す．この表から以下のことが言える．

- EVLUB 分布は大きい標本 ($N \geq$約200) では，対数正規分布より推定精度が劣ることがある (Case3, Case4) が，小さい標本 ($N \leq 50$) では，全てのケースで対数正規分布より優れている．
- Gumbel 分布が極めて良い推定値を与えており，また，Case 1 から Case 4 に移るに従って，推定精度が落ちている．この原因として母ひずみの影響が考えられる．なぜなら，母ひずみが大きくなると，相対的に右裾部分が長くなり，確率水文量が変動しやすくなるために，推定精度が落ちてしまうからである．Gumbel 分布の母ひずみは一定値約1.13をとるので，Case 1 から Case 4 に比べてかなり小さい値である．よって，推定値のばらつきが相対的に小さいので推定精度が良くなる (C_v が小さく評価される)．Case 1 から Case 4 にかけて EVLUB 分布の母ひずみは，3.25, 3.50, 3.75, 4.00と大きくなっていくので，推定精度は落ちていく．

4　結語

本研究で得られた成果を以下に示す．

- 規準化を行うことで，EVLUB 分布の2つの母数 ν, κ と，基本統計量との関係を数値解析的に示した．
- 上側無限大の対数正規分布に比べて，上側有界の EVLUB 分布は小標本 ($N \leq 30$) に対する T 年確率水文量の推定精度がはるかに良い．
- 母ひずみが小さいほど，T 年確率水文量の推定精度は良くなる．

参考文献

[1] 宝　馨・土佐香織：両側有界分布の水文頻度解析への応用，水工学論文集，第 43 巻，pp. 121-126，1999.

[2] Jun Kanda (1981) : A New Extreme Value Distribution With Lower and Upper Limits for Earthquake Motions and Wind Speeds, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 31, University of Tokyo Press, pp. 351-354.

[3] 宝　馨・高棹琢馬・友杉邦雄・八橋孝典：可能最大降水を上限値として持つ確率分布による頻度解析，水文・水資源学会1994年研究発表会要旨集，pp. 48-49. 1994.

[4] 荒木一弘：モンテカルロ・シミュレーションによる両側有界極値分布の特性評価，京都大学工学部土木工学科特別研究1999.