第 I 部門　　Wavelet を用いた 3 次元クラック問題における積分方程式の高速解法

京都大学大学院　学生会員　○吉川仁
京都大学工学研究科　正会員　西村直志
京都大学工学研究科　フェロー　小林昭一

1　序論

積分方程式法においては、係数行列が密であるため超大規模問題の解析が困難であった。ところが、離散化の際の基底関数として Wavelet 基底を用いると、Wavelet の持つコンパクトサポート、n 次までの関数との内積が 0（n 次 Wavelet）という性質により、積分方程式を離散化した係数行列の多くの成分が小さくなり、これを 0 と置き換えることが出来る。この様にして係数行列を圧縮し sparse 化することにより計算時間の短縮を試みる事が行なわれてきている [2]。しかし、この様な手法をクラック問題に用いるためには、クラックの縁の存在により、特別な工夫が必要となる。そこで、本報では、Laplace 方程式に支配される 3 次元クラック問題を取り上げ、必要な Wavelet を構成し、その数値的特性を調べる。また、代数方程式の解法としては行列を直接解かずに、反復法の GMRES 法を用いる。

2　境界積分方程式の定式化

3 次元無限領域 D にクラック S が存在しているとする。クラック問題の境界値問題を次のように設定する。

$$\triangle u = 0 \ \text{ in } \ D \setminus S, \ \ \frac{\partial u^{\pm}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \ \text{ on } \ S, \ \ u(\boldsymbol{x}) \to u^{\infty}(\boldsymbol{x}) \text{ as } \ |\boldsymbol{x}| \to \infty, \ \ \varphi = 0 \ \text{ on } \ \partial S \tag{1}$$

ここで、$+(-)$ はクラックの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の正（負）からの極限値、φ はクラックの開口変位：$u^+ - u^-$ である。

式 (1) に対応する Green 公式を書き下し、基本解 G を代入すると、クラック問題の解は次のように表示される。

$$u = u^{\infty} + \int_S \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} \varphi \quad \left(G = \frac{1}{4\pi r} \ \ (r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|\,) \right) \tag{2}$$

ここに G は 3 次元 Laplace 方程式の基本解である。source 点 $\boldsymbol{x}$ をクラックの境界上に近付ける極限操作を行なうと、クラック問題の境界積分方程式、

$$\frac{\partial u^{\infty}}{\partial \boldsymbol{n}_x}(\boldsymbol{x}) = -\text{p.f.} \int_S \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_y} \varphi(\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

が得られる。ここに、p.f. は発散積分の有限部分である。

接線方向の直交単位ベクトルを $\boldsymbol{s}^1, \boldsymbol{s}^2$ とすると、次の関係がある。

$$\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_y} = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial s_x^{\alpha} \partial s_y^{\alpha}} \tag{4}$$

また条件

$$\psi(\boldsymbol{x}) = 0 \ \text{ on } \ \partial S \tag{5}$$

を満たす S 上の任意関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ を式 (3) の両辺にかけて積分し、式 (4) を用いると、次の変分方程式が得られる。

$$\int_S \frac{\partial u^{\infty}}{\partial \boldsymbol{n}} \psi(x) = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_S \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial s_x^{\alpha}} \int_S G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \frac{\partial \phi(\boldsymbol{y})}{\partial s_y^{\alpha}} \tag{6}$$

Hitoshi YOSHIKAWA, Naoshi NISHIMURA, Shoichi KOBAYASHI

3 Wavelet

スケーリング関数として2階のスプライン関数

$$\phi(x) = 1 - \frac{|x|}{2} \text{ (if } |x| \leq 2), \ 0 \text{ (otherwise)} \tag{7}$$

を用いた時、Waveletは

$$\psi(x) = -1 - \frac{8}{5}|x| \ (|x| \leq 1), \ -\frac{13}{10} - \frac{7}{10}|x| \ (|x| \leq 2), \ -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}|x| \ (|x| \leq 3), \ 0 \text{ (otherwise)} \tag{8}$$

のように構成できる。ここで次式に注意する。

$$\int \phi(x)\psi(x)dx = 0 \tag{9}$$

本報で取り扱うクラック問題は、有限区間でWaveletを考える必要がある。有限区間のWaveletは、いわゆる境界Waveletを用いて求めることができるが[1]、クラックの問題では、さらにクラック両端での開口変位は0という条件を満たす必要がある。その様なWaveletを導入する事は困難であるので、次の様に疑似境界Waveletを定義する。

$$\psi_b(x) = \frac{1}{2}x(0 \leq x < 1), -\frac{3}{2}x + 2(1 \leq x < 2), \frac{3}{2}x - 4(2 \leq x < 3), -\frac{1}{2}x + 2(3 \leq x < 4), 0(\text{otherwise}) \tag{10}$$

なお、3次元クラックの解析においては、x_1 軸上、x_2 軸上に分布するスケーリング関数とWaveletのテンソル積を基底関数として用いる。

4 Wavelet基底を用いた高速解法

クラック問題の境界積分方程式をガラーキン法を用いて離散化する。その際の基底関数として、前章で述べたWaveletを用いる。Wavelet基底を用いた事により代数方程式 $Ax = b$ の係数行列 A の多くの成分が対角項の値に比べ非常に小さなものとなる。それゆえ、実際に代数方程式を解くにあたり、その値を0と置き換えても十分に精度の良い解が得られる。そこでテスト関数のWavelet基底のサポートと試行関数のWavelet基底のサポートの距離が基準値よりも離れていた場合、対応する係数行列成分を0と置き換える。即ち、

$$\tilde{A}_{jj'} := \begin{cases} A_{jj'} & \text{if } \mathrm{dist}(S_j, S_{j'}) \leq \delta_{l,l'} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、j, j', l, l' はテスト関数, 試行関数のWaveletナンバーとそのレベル。S_j は j 番目のWaveletのもつサポート、dist(' ',' ') はサポート間の距離である。また、基準値 $\delta_{l,l'}$ には、A.Rethsfeldら[2]による値

$$\delta_{l,l'} \geq \max\left\{(a2^{\alpha L})2^{-\beta l - \gamma l'}, 2^{-l}, 2^{-l'}\right\} \tag{11}$$

を用いる。ここで $1/3 \leq \beta \leq 1, \ 1 \leq \gamma \leq 4/3, \ \alpha = 1/3 + \beta, \ a = \text{const}, \ L$ は一番細いWaveletのレベルである。このようにして、計算すべき行列成分の個数を減らし、繰り返し解法のGMRES法を用いることで、未知数の大きな問題を高速で解くことができる。

5 結果

数値結果については紙面の都合上、当日述べる事とする。

参考文献

[1] チャールズK.チュウイ（桜井 明・新井 勉 訳）：ウェーブレット応用, 東京電気大学出版局,1997

[2] A. Rathsfeld:A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 157(1998)267-287