

大阪市立大学大学院 学生員 ○荒木秀樹
大阪市立大学工学部 正会員 小林治純

1. はじめに

これまで、異方性体の自由振動解析は多くなされているものの、衝撃応答解析は少ない。近年の複合材料の発展に伴い、異方性体の解析に関心が向けられている。主要な構造要素である円筒シェルも積層シェル理論に基づく動的解析も行われているが、正確な応力波動を表現できる 3 次元弾性論に基づく解析が好ましいことは言うまでもない。本研究は、横等方性材料よりなる円筒シェルの衝撃応答解析を 3 次元弾性論に基づいて行ったものである。解析手法は、固有関数展開法[1,2]を用いた。本手法によれば、自由振動問題の固有関数を求めることができれば、通常の動的応答解析におけるモード法と同じ手順により解析が行え、時間消去法としてのラプラス変換およびラプラス逆変換を使用する必要が無いメリットを有している。

数値計算例においては、異方性材料定数が応答に及ぼす影響を調べるため、等方面と異方面のヤング率比に着目し、応答を検討する。

2. 基礎式

図1は、取り扱う横等方性円筒シェルの座標系であり、 (r, θ) 面を等方面とし z 軸を異方軸とする。内外径は a, b 、スパン長を l とし、 $z=0, l$ の辺上で単純支持されているものとする。

座標方向の変位を u, v, w 、そして、 C_{ij} を材料定数、密度を ρ とすると基礎式は、次のようになる。

$$L_r(u, v, w) = \rho \ddot{u}, L_\theta(u, v, w) = \rho \ddot{v}, L_z(u, v, w) = \rho \ddot{w} \quad (1)$$

ただし、演算子 L_r, L_θ, L_z の内容は、

$$\begin{aligned} L_r(u, v, w) = & c_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + c_{66} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & + (c_{12} + c_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - (c_{11} + c_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ & + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \\ L_\theta(u, v, w) = & (c_{11} + c_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + (c_{11} + c_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ & + c_{66} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + c_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + c_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ & + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} \\ L_z(u, v, w) = & (c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z} \right) \\ & + c_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

境界条件は、 $f(t)$ を荷重の時間関数として次のよう与えられる。

$$\begin{aligned} u=v=\sigma_z=0 & \quad (z=0, l) \\ \sigma_r=\tau_{r\theta}=\tau_{rz}=0 & \quad (r=a) \\ \sigma_r=-f(t)q(\theta, z), \tau_{r\theta}=\tau_{rz}=0 & \quad (r=b) \end{aligned} \quad (3)$$

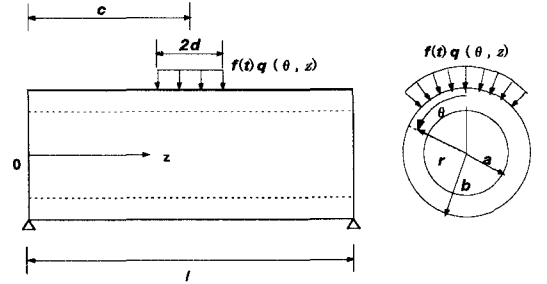


図1 横等方性円筒シェルの座標系

3. 衝撃応答解析

固有関数展開法によると、式(1)の解を次のようにおく。

$$u=u^s+u^d, \quad v=v^s+v^d, \quad w=w^s+w^d \quad (4)$$

ここに、 u^s, v^s, w^s は準静的解で、式(1)の慣性項を無視した場合に相当し、つり合い式：

$$\begin{aligned} L_r(u^s, v^s, w^s) &= 0 \\ L_\theta(u^s, v^s, w^s) &= 0 \\ L_z(u^s, v^s, w^s) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

および、境界条件：

$$\begin{aligned} u^s=v^s=\sigma_z^s=0 & \quad (z=0, l) \\ \sigma_r^s=\tau_{r\theta}^s=\tau_{rz}^s=0 & \quad (r=a) \\ \sigma_r^s=-f(t)q(\theta, z), \tau_{r\theta}^s=\tau_{rz}^s=0 & \quad (r=b) \end{aligned} \quad (6)$$

を満足する。

次に、 u^d, v^d, w^d を次のようにおく。

$$\begin{aligned} u^d &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) U_{mnl}(r, \theta, z) \\ v^d &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) V_{mnl}(r, \theta, z) \\ w^d &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) W_{mnl}(r, \theta, z) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $Q_{mnl}(t)$ は未定の時間関数、また、 $U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}$ は固有関数であり、次の自由振動のつり合い式：

$$\begin{aligned} L_r(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 U_{mnl} \\ L_\theta(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 V_{mnl} \\ L_z(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 W_{mnl} \end{aligned} \quad (8)$$

および境界条件:

$$\begin{aligned} U_{mnl} = V_{mnl} = \sigma_z^{(mnl)} = 0 & \quad (z=0, l) \\ \sigma_r^{(mnl)} = \tau_{r\theta}^{(mnl)} = \tau_{rz}^{(mnl)} = 0 & \quad (r=a, b) \end{aligned} \quad (9)$$

を満足する。ただし、 mnl は r, θ, z 方向の波数である。

また、固有関数には、次の直交性がある。

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l (U_{mnl} U_{ijk} + V_{mnl} V_{ijk} + W_{mnl} W_{ijk}) r dr d\theta dz = \delta_{mi} \delta_{nj} \delta_{lk} N_{mnl}^2 \quad (10)$$

ただし、 $\delta_{mi}, \delta_{nj}, \delta_{lk}$ はクロネッカーのデルタ、 N_{mnl} はノルムである。

式(4)を式(1)に代入し、式(5)を利用すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} L_r(u^d, v^d, w^d) &= -\rho \ddot{u}^d + \rho \ddot{u}^d \\ L_\theta(u^d, v^d, w^d) &= -\rho \ddot{v}^d + \rho \ddot{v}^d \\ L_z(u^d, v^d, w^d) &= -\rho \ddot{w}^d + \rho \ddot{w}^d \end{aligned} \quad (11)$$

次に式(7)を上式に代入して式(8)を利用すると、

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=0}^l \sum_{l=1}^l (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) U_{mnl} &= -\rho \ddot{u}^d \\ \sum_{m=-l}^l \sum_{n=0}^l \sum_{l=1}^l (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) V_{mnl} &= -\rho \ddot{v}^d \\ \sum_{m=-l}^l \sum_{n=0}^l \sum_{l=1}^l (\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}) W_{mnl} &= -\rho \ddot{w}^d \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで、 $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}$ をそれぞれ、上式の第1式～第3式の両辺に掛け、3式を加え合わせ、さらにシェル全体にわたり積分し、固有関数の直交性を利用すると、時間関数 $Q_{mnl}(t)$ に関する次の微分方程式が求められる。

$$\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl} = -Z_{mnl} \ddot{f}(t) \quad (13)$$

ここに、 Z_{mnl} は次の積分より求まるものである。

$$Z_{mnl} = \frac{1}{N_{mnl}} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l (U^s U_{mnl} + V^s V_{mnl} + W^s W_{mnl}) r dr d\theta dz \quad (14)$$

ただし、 U^s, V^s, W^s は $f(t)=1$ に対する静的解である。上式を初期条件の下に解けば、時間関数が決まり、衝撃応答解が決まる。

なお、静的解、固有関数の具体式は省略する。

4. 数値計算例

シェルの内外径比を $a/b=0.5$ 、スパン半径比を $l/b=5$ とし、載荷面積 $2d \times 2\gamma b$ ($d=l/5, \gamma=\pi/4$) の部分等分布荷重が $z=l/2, \theta=0$ を中心に時間的にはステップ状に載荷するものとした。なお、衝撃を受ける前の円筒シェルは静止しているものとしている。また材料定数としては、実在の横等方性体としてサファイア、また等方面と異方面での弾性定数比 $E'/E, G'/G$ を $1/2, 1/3$ としたものを選定している。

応答の着目点は、スパン中央断面上 ($z=l/2$) の $\theta=0$ 、 $r=(a+b)/2$ 点である。応答図には、次の無次元時間 τ を用いている。

$$\tau = \frac{ct}{b-a}, \quad c = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \quad (15)$$

すなわち、 c は、シェル厚方向の波速であり、 $\tau=1$ はシェル厚 $(b-a)$ を進むのに要する時間を意味する。

図2、図3に応力 σ_r, σ_θ の応答曲線を示している。いずれもシェル内外面での反射波による鋭い応答を示しており、また異方性の影響が強く現れていることが分かる。他の結果については、講演当日発表の予定である。

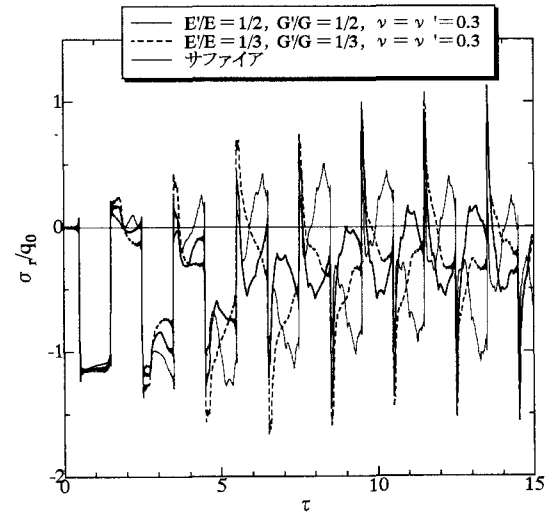


図2 応力 σ_r の応答曲線

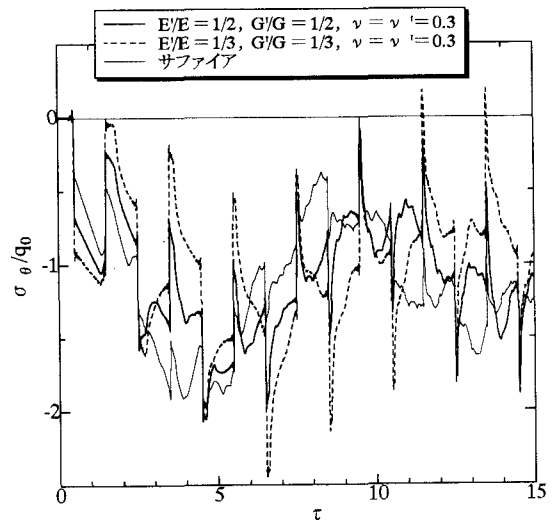


図3 応力 σ_θ の応答曲線

参考文献

- [1] 小林, 米田, 石丸, 園田: 異方性円板の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol.42A, 1996. [2] 小林, 米田: 異方性板の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol.44, 1998.