

大阪市立大学大学院 学生員 ○須方 大介
大阪市立大学工学部 正会員 小林 治俊

1. はじめに

異方性体の動的挙動は、最近の複合材料の発展と適用にかんがみ、重要視されている。本研究は、横等方性材料よりなる矩形厚板の衝撃応答解析を三次元動弾性論に基づいて解析を行ったものである。解析手法は、横等方性円板[1]および平面梁[2]の衝撃応答解析と同様に固有関数展開法を用いた。本手法は、対象とする問題の固有関数(振動モード関数)を求めることができ、構造物の動的解析で用いられているモード解析と同様にして解を求めることができ、動弾性解析で一般に用いられているラプラス変換法の帰結としての煩雑なラプラス逆変換は不用である。また、固有関数(振動モード関数)を求める際に必要な波動方程式は静的解の Hu[3]の関数を拡張して導いた。数値計算例において、等方性体の挙動との比較を通じ材料異方性が応答に及ぼす影響を調べた。

2. 基礎式

取り扱う横等方性矩形板の座標系を図1に示す。 x - y 面を等方面、 z 軸を異方軸とし、矩形板の辺長を a, b 、板厚を h とし、支持条件は4辺単純支持とする。座標方向の変位を u, v, w とすると基礎式は以下になる。

$$L_u(u, v, w) = \rho \ddot{u}, \quad L_v(u, v, w) = \rho \ddot{v}, \quad L_w(u, v, w) = \rho \ddot{w} \quad (1)$$

ρ は密度、ドットは時間微分、また演算子 L_u, L_v, L_w は、

$$\begin{aligned} L_u(u, v, w) = & C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ & + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad L_v(u, v, w) = C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ & + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \quad L_w(u, v, w) = \\ & (C_{13} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) + C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

である。 C_{ij} は材料定数であり、工学的表示をすれば以下のようになる。

$$\begin{aligned} C_{11} = & \frac{E' - E\nu'^2}{(1+\nu)E'^2 R}, \quad C_{12} = \frac{E'\nu - E\nu'^2}{(1+\nu)E'^2 R}, \quad C_{13} = \frac{\nu'}{E'R}, \\ C_{33} = & \frac{1-\nu}{ER}, \quad C_{44} = G', \quad C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$R = \frac{1}{E'} \left\{ \frac{1}{E} (1-\nu) - 2 \frac{\nu'}{E'} \right\}$$

E, ν は各々等方面でのヤング率、ポアソン比、また E', ν', G' は各々等方面に垂直な面でのヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数である。

境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} x=0, a \text{ で } w=v=\sigma_x &=0 \\ y=0, b \text{ で } w=u=\sigma_y &=0 \\ z=h/2 \text{ で } \sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz} &=0 \\ z=-h/2 \text{ で } \sigma_z=-f(t)q(x, y), \tau_{xz}=\tau_{yz} &=0 \end{aligned} \quad (4)$$

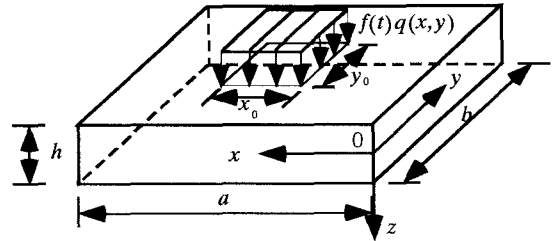


図1 矩形板の座標系

3. 衝撃応答解析

式(1)の解を次のように置く。

$$u = u^s + u^d, \quad v = v^s + v^d, \quad w = w^s + w^d \quad (5)$$

ここで、 u^s, v^s, w^s は式(1)の慣性項を無視した場合の準静的解で、つり合い式：

$$L_u(u^s, v^s, w^s) = 0, \quad L_v(u^s, v^s, w^s) = 0, \quad L_w(u^s, v^s, w^s) = 0 \quad (6)$$

および境界条件：

$$\begin{aligned} x=0, a \text{ で } w^s=v^s=\sigma_x^s &=0 \\ y=0, b \text{ で } w^s=u^s=\sigma_y^s &=0 \\ z=h/2 \text{ で } \sigma_x^s=\tau_{xz}^s=\tau_{yz}^s &=0 \\ z=-h/2 \text{ で } \sigma_x^s=-f(t)q(x, y), \tau_{xz}^s=\tau_{yz}^s &=0 \end{aligned} \quad (7)$$

を満足する。

次に、 u^d, v^d, w^d は未定の時間関数 $Q_{mnl}(t)$ との積よりなる級数で次のように与える。

$$\begin{aligned} u^d = & \sum_{m=-1}^{\infty} \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{l=-1}^{\infty} Q_{mnl}(t) U_{mnl}(x, y, z), \quad v^d = \sum_{m=-1}^{\infty} \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{l=-1}^{\infty} Q_{mnl}(t) V_{mnl}(x, y, z) \\ w^d = & \sum_{m=-1}^{\infty} \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{l=-1}^{\infty} Q_{mnl}(t) W_{mnl}(x, y, z) \end{aligned} \quad (8)$$

固有関数(振動モード関数) $U_{mnl} V_{mnl} W_{mnl}$ は、自由振動のつり合い式:

$$\begin{aligned} L_u(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 U_{mnl} \\ L_v(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 V_{mnl} \\ L_w(U_{mnl}, V_{mnl}, W_{mnl}) &= -\rho \omega_{mnl}^2 W_{mnl} \end{aligned} \quad (9)$$

および境界条件:

$$\begin{aligned} x=0, a \text{ で } W_{mnl} &= V_{mnl} = \sigma_x^{(mnl)} = 0 \\ y=0, b \text{ で } W_{mnl} &= U_{mnl} = \sigma_y^{(mnl)} = 0 \\ z=\pm h/2 \text{ で } \sigma_z^{(mnl)} &= \tau_{xz}^{(mnl)} = \tau_{yz}^{(mnl)} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

を満足する。また、固有関数には次の直交性がある。

$$\int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (U_{mnl} U_{ijk} + V_{mnl} V_{ijk} + W_{mnl} W_{ijk}) dx dy dz = \delta_{mi} \delta_{nj} \delta_{lk} N_{mnl}^2 \quad (11)$$

$\delta_{mi}, \delta_{nj}, \delta_{lk}$ はクロネッカーのデルタ, N_{mnl} はノルムである。

(5)式を(1)式に代入し、式(6)を利用すると

$$\begin{aligned} L_u(u^d, v^d, w^d) &= -\rho \ddot{u}^d + \rho \ddot{u}^d, \quad L_v(u^d, v^d, w^d) = -\rho \ddot{v}^d + \rho \ddot{v}^d \\ L_w(u^d, v^d, w^d) &= -\rho \ddot{w}^d + \rho \ddot{w}^d \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。次に式(8)を上式に代入し、式(9)を利用すれば

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}] U_{mnl} &= -\rho \ddot{u}^d \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}] V_{mnl} &= -\rho \ddot{v}^d \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mnl} + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}] W_{mnl} &= -\rho \ddot{w}^d \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。ここで、 $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}$ をそれぞれ上式の第 1~3 式の両辺に掛け、3 式を加えあわせ、さらに物体全体にわたり積分し、固有関数の直交性を利用すると次式を得る。

$$\ddot{Q}_{mnl}(t) + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}(t) = -\ddot{f}(t) Z_{mnl} \quad (14)$$

ここに、

$$\begin{aligned} Z_{mnl} &= \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (U^* U_{mnl} + V^* V_{mnl} + W^* W_{mnl}) dx dy dz / N_{mnl}^2 \\ &= -\int_0^a \int_0^b \omega_{mnl}^2 q(x, y) dx dy / N_{mnl}^2 \end{aligned} \quad (15)$$

であり、 U^*, V^*, W^* は $f(t)=1$ とした静的解を意味する。なお、静的解、固有関数の具体式は記さなかったが、これらは、Hu の変位関数[3]を利用することにより求められる。

4. 数値計算例

板厚比 $h/a=0.3$ の正方形板に載荷幅 $x_0/a=y_0/b=0.2$ の部分等分布荷重 q_0 が時間に関してステップ状($f(t)=H(t)$)に作用する場合を扱う。また、衝撃を受ける前の矩形板は静止しているものとする。なお、時間については以下に示す無次元時間を使用した。

$$\tau = \frac{c_1 t}{h}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \frac{E}{\rho} \quad (16)$$

c_1 は、等方性板の縦波速度である。なお、材料定数については異方性の特性を簡明に検討するために、異方面と等方面でのヤング率比 E'/E のみを変化させ、ポアソン比は $\nu=\nu'=0.3$ と一定にしている。

図4~6に σ_z, σ_x の応答曲線を示す。各応答ともにヤング率比の影響が強く表れていることがわかる。

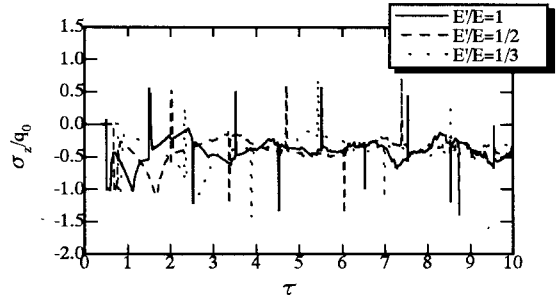


図4 板厚中央面での σ_z の応答曲線

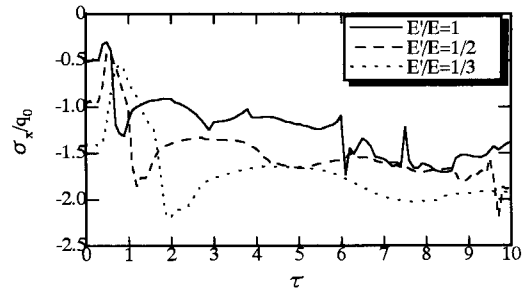


図5 板上面中央点での σ_x の初期応答曲線

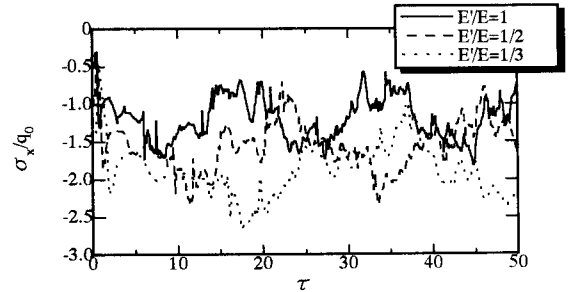


図6 板上面中央点での σ_x の長期応答曲線

5. まとめ

固有関数展開法が衝撃応答解析に有用であることがわかった。

参考文献

- [1] 小林・米田: 異方性円板の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol.43A, 1996. [2] 小林・米田: 異方性板の衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol.45A, 1998. [3] Hu, H.-C.: On the Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic body, Acta Scientia Sinica, Vol.2, 1954.