

近畿大学理工学部 学生員 ○合田 桂

近畿大学理工学部 正会員 江藤 剛治

近畿大学理工学部 正会員 竹原 幸生

1. はじめに

PTV(Particle Tracking Velocimetry)による観測とCFD(Computational Fluid Dynamics)による計算を直接融合し、より確からしい流れ場を推定しようという Hybrid CEFD (Hybrid Computational/Experimental Fluid Dynamics) の開発が行われている。

Hybrid CEFD における計算手法として、MLSを採用する。MLSでは、各格子点上のある範囲(適合領域)内にある複数の粒子上の情報から、それらの情報を格子点上の情報に直すことなく、直接、任意の点(参照点)における各空間微係数を求める。適合領域は、参照点を中心とし、そこから離れるほど重みが小さくなる重み関数(正規分布型重み関数)を計測点に乗じることによって定義される。

本研究では、正規分布型重み関数の最適適合領域(最適適合領域サイズ)の存在を示す。そして、この最適適合領域サイズを次元解析的手法と数値計算により決定する。また、純理論的に誘導する。

2. 最適適合領域サイズの存在

空間内の1次、2次微係数をMLSにより推定する。

図-1は、重み関数の代表幅 λ と、空間微係数(ここでは、2次微係数 d^2y/dx^2)に生じる推定誤差(の自乗平均)との関係を表している。ノイズ σ_ε に対して λ が十分小さいとき、解は不安定になり推定誤差は大きくなる。 λ が大きくなると推定誤差は、最小値(最適適合領域サイズ λ_{opt})に近づく。さらに大きくすると推定誤差は徐々に増加し、ある一定値に収束する。

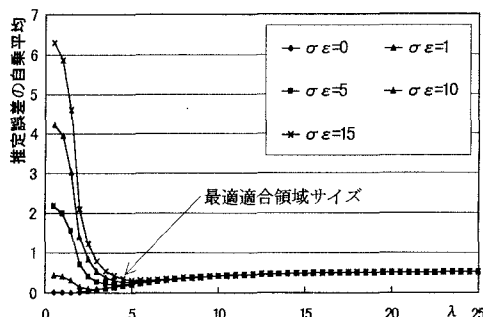


図-1 最適適合領域サイズと誤差

3. 次元解析的手法と数値計算による最適適合領域サイズの決定

1) 次元解析的手法による最適適合領域サイズの予測

式(1), (2)は、それぞれ1次、2次微係数を推定するときに生じる推定誤差の式形を、次元解析的手法により予測したものである。

1次微係数に伴う推定誤差 $\varepsilon_{T\beta}$:

$$\varepsilon_{T\beta} = \beta_H a_3 \lambda^2 + \beta_N \sigma_\varepsilon \rho^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{3}{2}} \quad (1)$$

ここで、 a_3 は粒子情報を表す関数 y の3次微係数 d^3y/dx^3 、 ρ は粒子密度(単位長さ当たりの粒子数)である。 β_H 、 β_N は未定係数である。

2次微係数に伴う推定誤差 $\varepsilon_{T\gamma}$:

$$\varepsilon_{T\gamma} = \gamma_H a_4 \lambda^2 + \gamma_N \sigma_\varepsilon \rho^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{5}{2}} \quad (2)$$

ここで、 a_4 は4次微係数 d^4y/dx^4 である。 γ_H 、 γ_N は未定係数である。

式(1), (2)の誤差に対するパラメーターの影響を数値計算で検討した結果、それぞれ式(1), (2)の関係に従うことが確認できた。

一例として、式(1)の誤差パラメーター ρ の影響を示す。図-2は、 $\varepsilon_{T\beta} - \beta_H a_3 \lambda^2$ と ρ の関係を対数表示したものである。 $\varepsilon_{T\beta} - \beta_H a_3 \lambda^2$ は、 ρ の $-1/2$ 乗に比例していることが図-2から分かる。ここで、 $\sigma_\varepsilon = 2.5$ 、 $\lambda = 2.5$ とする。 X は、 X 軸上の粒子情報の位置を表す。

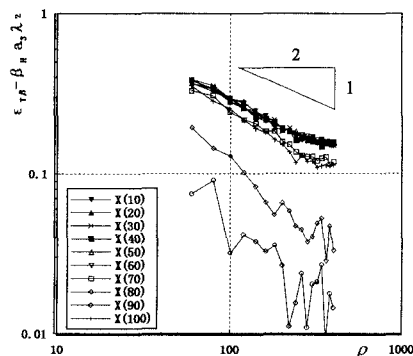


図-2 誤差パラメーター ρ の影響

2) 数値計算による最適適合領域サイズの決定

式(1)の未定係数 β_H 、 β_N を最小自乗法により決定

する。得られた未定係数を用いて、1次微係数に対する最適適合領域サイズを決定する。このとき、推定誤差 λ を最小 ($\partial \varepsilon_{T\beta} / \partial \lambda \equiv 0$) とする。

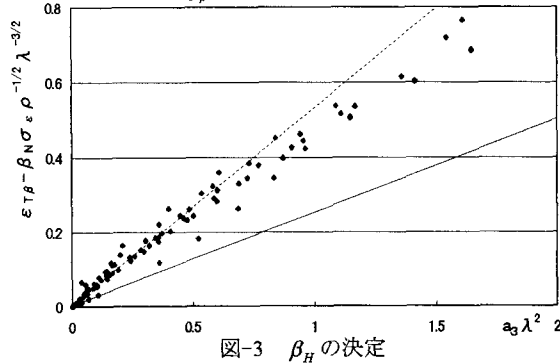


図-3 β_H の決定

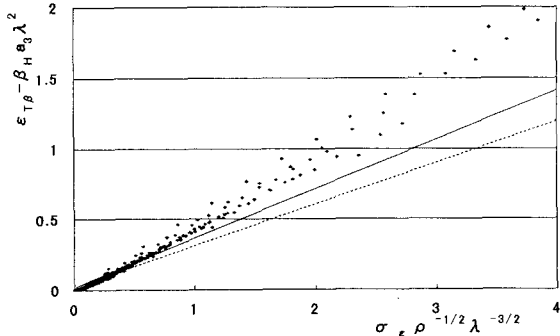


図-4 β_N の決定

最小自乗法により $\beta_H \approx 0.484$, $\beta_N \approx 0.294$ となった。図-3, 図-4で、最小自乗法により得られた直線を破線、後述の理論解を実線で示す。

得られた未定係数から、1次微係数に対する最適適合領域サイズ $\lambda_{opt\beta}$ は式(3)のようになる。

$$\lambda_{opt\beta} = 0.801 a_3^{2/7} \sigma_\varepsilon^{2/7} \rho^{-1/7} \quad (3)$$

同様に、式(2)の未定係数 γ_H , γ_N を最小自乗法により求める。得られた未定係数から、2次微係数に対する最適適合領域サイズ $\lambda_{opt\gamma}$ は式(4)のようになる。

$$\lambda_{opt\gamma} = 1.009 a_4^{2/9} \sigma_\varepsilon^{2/9} \rho^{-1/9} \quad (4)$$

4. 数値シミュレーションによる精度の検討

得られた最適適合領域サイズ $\lambda_{opt\beta}$, $\lambda_{opt\gamma}$ の精度を評価するため、最適適合領域サイズを用いた MLS を 1 次元純移流方程式、純拡散方程式に導入する。

まず、x 軸上の 0 から 200 に等間隔に分布した 201 個の粒子に対し、正規分布型の初期ポテンシャル ϕ を与える。初期ポテンシャルにのみノイズとして、 $\sigma_\varepsilon = 1.0$ の正規乱数を導入する。境界問題として、周期境界条件を与えるものとする。各 step 間隔を 0.1 (s) とする。図-5, 図-6 は、それぞれ初期状態から 1step, 10step,

100 step における移流、拡散の様子を示す。図-5 で移流係数を $C=1.0$ (m/s), 図-6 で拡散係数を $D=10$ (m²/s) とする。純移流方程式、純拡散方程式の厳密解を、各 step におけるそれぞれの理論解とする。

図-5, 図-6 から、それぞれのシミュレーション結果と理論解は、完全に一致していると言える。

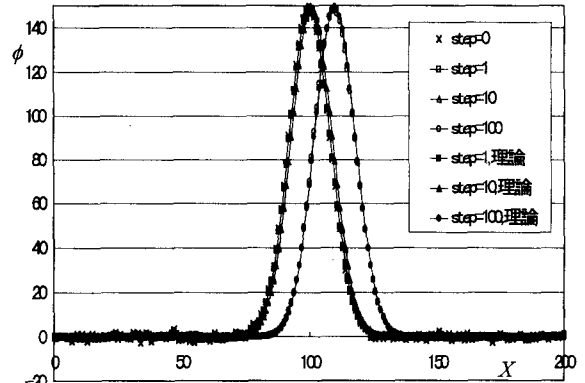


図-5 移流現象シミュレーション

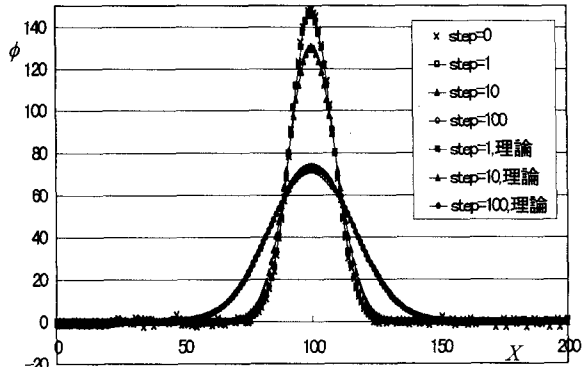


図-6 拡散現象シミュレーション

5. 最適適合領域サイズの理論解との比較

理論的に誘導した最適適合領域サイズを以下に示す。

(1) 1次微係数に対する最適適合領域サイズ

$$\lambda_{opt\beta} = 1.026 a_3^{2/7} \sigma_\varepsilon^{2/7} \rho^{-1/7} \quad (5)$$

(2) 2次微係数に対する最適適合領域サイズ

$$\lambda_{opt\gamma} = 1.167 a_4^{2/9} \sigma_\varepsilon^{2/9} \rho^{-1/9} \quad (6)$$

理論式(5), (6)と、次元解析的手法と数値計算によって得られた式(3), (4)を比較すると、係数に 20% 程度誤差があるだけで両者の式形は完全に一致している。

図-1 から分かるように最適適合領域サイズ(推定誤差最小)の付近では、推定誤差の値は非常に緩やかに変化する。従って、最適な係数値をシミュレーションから求めるのは難しい。この点を考慮すれば、理論解と、次元解析的手法と数値計算によって得られた近似解は完全に一致していると言ってよい。