境界積分方程式法による大型境界値問題の解法について

京都大学工学研究科　正　西村直志
京都大学大学院　非　吉田研一
京都大学大学院　非　宮越優
京都大学工学研究科　フェロー　小林昭一

1 序

境界積分方程式法は得られる行列が密になるため、案外小さい問題にしか適用出来ないと考えられてきたが、最近、多重極法等の高速解法によってパソコン程度の計算機でも数万元規模の問題の解析が可能になってきた。本報では前報 [1] に引き続き、3 次元弾性体における多重極法、及び 2 次元面外剪断問題における多重極 Galerkin 法によるクラック問題の解法を検討した。

2 3 次元弾性体における多重極法

今、3 次元無限弾性体中に、一般には複数の互いに交わらない曲線からなるクラック S が有るとする。3 次元弾性方程式のクラック問題は次の境界値問題の解を求めることに帰着される。

$$\Delta^*_{ik} u_{ik} = 0 \quad \text{in } R^3, \qquad t_i = 0 \quad \text{on } S, \qquad t_i \to t_i^\infty \quad \text{as } |x| \to \infty$$

ここに Δ^*_{ik} は弾性学の微分作用素、t_i^∞ は漸近場 u_i^∞ に対応する表面力である。また、上付きの $+$ $(-)$ は S の法線が向く側 (その反対側) からの極限を指す。この問題の解、および解くべき積分方程式は

$$u(\boldsymbol{x})_m = u_m^\infty(\boldsymbol{x}) + \int_S \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{mp} C_{jknp} n_k \phi_j dS \text{ in } R^3 \setminus S, \quad t_a^\infty = n_b C_{ablm} \int_S e_{rsl} C_{pnsj} \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{mp} e_{ruv} \phi_{j,u} n_v dS \text{ on } S \tag{1}$$

となる。ここに、ϕ は開口変位、Γ は 3 次元弾性学の基本解であり、e_{ijk} は交代記号である。ここで、$r = |x-y|$ が以下のように展開される事に注意する。

$$r = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^{N} \left(\frac{S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) \overline{U_{N,M}}(\overrightarrow{Oy})}{2N+3} - \frac{T_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) \overline{R_{N,M}}(\overrightarrow{Oy})}{2N-1} \right) \quad |\overrightarrow{Ox}| > |\overrightarrow{Oy}| \tag{2}$$

ここに、$R_{N,M}, S_{N,M}, U_{N,M}, T_{N,M}$は原点 Oからの点 x の極座標を (ρ, θ, ϕ) とすると,

$$R_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) = \frac{1}{(N+M)!} P_N^M(\cos\theta) e^{iM\phi} \rho^N, \qquad S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) = (N-M)! P_N^M(\cos\theta) e^{iM\phi} \frac{1}{\rho^{N+1}}$$
$$U_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) = \rho^2 R_{N,M}(\overrightarrow{Ox}), \qquad T_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) = \rho^2 S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) .$$

と書ける関数である。これらの関係と基本解の表示を用いて、多重極法を展開することが出来る。一般的な結果は省略するが、S を平面要素で近似し、各要素 S_I 上で ϕ が一定値 ϕ^I であるとすると、$S_o = \sum_I S_I$ での式 $(1)_2$の積分は以下のように書くことが出来る。

$$\int_{S_0} e_{rsl} C_{pnjs} \Gamma_{mp,n} e_{ruv} \phi_{j,u} n_v dS_y = \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{N=0}^{P} \sum_{M=-N}^{N}$$
$$\left(\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{ij} S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) \right) \sum_I \oint_{\partial S_I} e_{rsl} C_{pnsj} \frac{\partial}{\partial y_n} \overline{R_{N,M}}(\overrightarrow{Oy}) dy_r \phi_j^I \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) \sum_I \oint_{\partial S_I} e_{rsl} C_{pnsj} \frac{\partial}{\partial y_n} ((\overrightarrow{Oy})_p \overline{R_{N,M}}(\overrightarrow{Oy})) dy_r \phi_j^I \right) \tag{3}$$

Naoshi NISHIMURA, Ken-ichi YOSHIDA, Masaru MIYAKOSHI, Shoichi KOBAYASHI

ここに、x は S_o から十分遠く、$|\overrightarrow{Ox}| > |\overrightarrow{Oy}|$ $(y \in S_o)$ が成り立つ点である。また、N に関する和は、本来無限和であるが、P 項で打ち切ってある。式 (3) における線積分の和が、弾性学における多重極モーメントである。式 (3) には 4 組の多重極モーメントが現れるが、うち 1 組は独立でなく、結局 3 組のモーメントによって (1) の積分を表すことが出来る。

以上の準備の下に多重極法のアルゴリズム [1] に従って積分方程式 $(1)_2$を数値的に解く。考える例ではクラックは x_3 方向を向いた単一の平面円形クラックとし、$t^\infty = (0,0,1)$、$P = 10$ とした。連立方程式の解法としては、前処理無しの GMRES を用いた。例題における未知数の数と全計算時間を図 1 左に示した。なお、図中の 'conventional' は選点法による従来法、'fmm' は線積分を解析的に評価した多重極法、'fmmnew' は線積分を積分点 1 点の数値積分で評価した多重極法の CPU 時間である。なお、次節の例も含めて、計算は sun SS20 で行なった。

3 2 次元面外剪断問題における多重極 Galerkin 法

前節と同じ問題を 2 次元面外剪断状態において考える。クラック問題の解析精度は Galerkin 法を用いることによって飛躍的に向上することが知られているが、これまで、解析効率を考慮して選点法が用いられることが多かった。しかし、多重極法を用いることにより、Galerkin 法の効率を高めることが出来る。

Laplace 方程式のクラック問題の変分方程式は次のように書ける。

$$\int_S \frac{\partial \psi}{\partial s}(x) \int_S \frac{\partial G}{\partial s_y}(x-y)\phi(y) ds_y ds_x + \int_S \psi \frac{\partial u^\infty}{\partial n} ds, \quad G(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x| \tag{4}$$

ここに、ψ は test 関数である。式 (4) 左辺第 1 項の内側の積分に多重極法を適用すれば、式 (4) を Galerkin 法によって容易に解くことが出来る。図 1 右には単一の直線亀裂に $\partial u^\infty/\partial n = 1$ が作用した場合の各種多重極法による解析の CPU 時間を示す。特に行列の好条件件を反映して、前処理をしない Galerkin 法は未知数が 500 程度の問題で、前処理を用いた選点法より高速となっている。

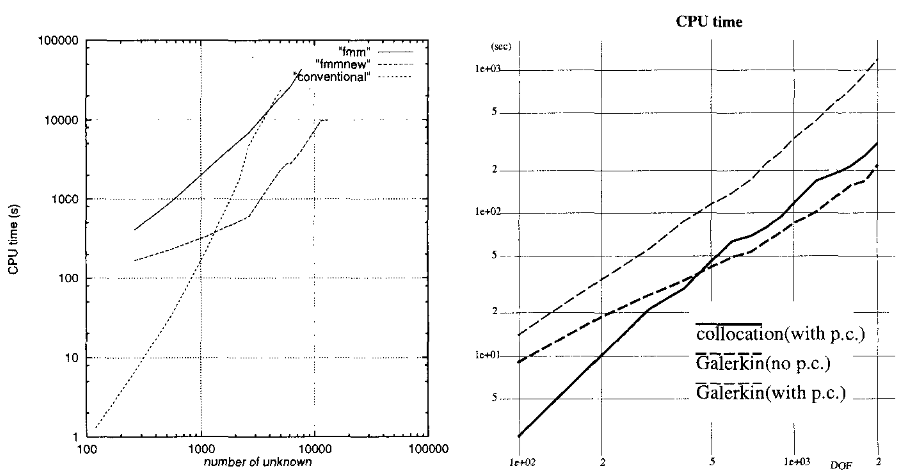

図 1: CPU 時間。左: 3 次元弾性問題、右: 2 次元 Galerkin 法

参考文献

[1] 西村直志、吉田研一、小林昭一: 境界要素法論文集 14, 37–42, 1997.