始業時刻の分布を考慮した鉄道通勤交通需要管理効果に関する研究

京都大学大学院　学生会員　○田中　成興
京都大学大学院　正会員　小林　潔司
広島大学工学部　正会員　奥村　誠
中央復建コンサルタンツ(株)　フェロー会員　永野　光三

1. はじめに

本研究では、鉄道通勤交通における需要管理政策が混雑の軽減に対して与える効果を、新都市経済学的アプローチに基づいて検討する。鉄道企業は利潤が最大になるように時刻別の輸送サービスを供給し、家計は各自の効用が最大になるように出発時刻を選択する。そして各時刻において、サービスの集計的需要と輸送力の関係から通勤列車の混雑度が決まる。つまり、異なる時刻によって差別化された財（輸送サービス）に対して需要が定義され、そのサービスに対する需給関係より混雑度が決定される。本研究ではこのような市場均衡を最適制御問題として定式化することを試み、さらに市場均衡が必ずしも社会的最適にはならないことにより、通勤交通需要のマネジメント方策が必要になることを理論的に解明したいと考える。

2. 市場均衡の定式化

(1) 家計行動の定式化

本稿では大都市圏においてベッドタウンと都心とを結ぶ一本の通勤鉄道を想定する。家計による総輸送需要はN人と固定されている。一般企業の始業時刻は先験的に決定されており、遅刻はないものと考える。

いま、ある基準の時刻を原点（$t=0$）とする座標軸を導入する。時刻tに出発する代表的家計の効用関数を次式のように定義する。

$$u = -s(t)^{\eta} + ct \tag{1}$$

$s(t)$：時刻tに出発したときの列車の混雑度、c：時間費用、である。混雑度には物理的限界があり、$0 \le s(t) \le \bar{s}$である。家計の行動は次のように定式化できる。

$$\max_{t} \quad [-s(t)^{\eta} + ct] \tag{2a}$$
$$s.t. \quad t + \tau = T \tag{2b}$$
$$\tau \ge 0 \tag{2c}$$

λを始業時刻Tの限界効用を表すラグランジュ乗数としてキューン・タッカーの定理を用いてこれを解くと、混雑度が次のように求められる。

$$s(t) = (ct + \Lambda)^{\frac{1}{\eta}} \tag{3}$$

Λ：λの原始関数、である。ここで、業務開始時刻が次に示すような拡張したパレート分布に従うとする。

$$\Pi(T) = \begin{cases} A(2T_0 - T)^{-a} & (T_1 \le T < T_0 \text{のとき}) \\ AT^{-a} & (T_0 \le T \le T_2 \text{のとき}) \end{cases} \tag{4}$$

ただし　$\int_{T_1}^{T_2} \Pi(T)dT = 1$

家計の行動は$\lambda = 0$かつ$\tau \ge 0$の場合と、$\lambda > 0$かつ$\tau = 0$の場合とに分けられるが、後者の場合に輸送サービスの集計的需要$D(t)$は、$D(t) = N\Pi(t)$となる。以下、式(10)(11)(20)(21)において上段が$T_1 \le T < T_0$のとき、下段が$T_0 \le T \le T_2$のときとする。

(2) 鉄道企業の行動と市場均衡

鉄道企業の費用関数を次のように仮定する。

$$z = \int_{t_0}^{T_2} \zeta_0 \alpha(t)^{\xi} dt \tag{5}$$

すると、家計と企業の最適化行動によって実現する出発時刻別の輸送サービスの需給均衡は、以下の最適化問題の解として表される。

$$\max_{\alpha(t)} \quad \left[-\int_{t_0}^{T_2} \zeta_0 \alpha(t)^{\xi} dt \right] \tag{6a}$$
$$s.t. \quad \dot{s}(t) = \Omega(s(t), \lambda) \tag{6b}$$
$$\dot{m}(t) = s(t)\alpha(t) \tag{6c}$$
$$0 \le \alpha(t) \le \bar{\alpha} \tag{6d}$$
$$m(t_0) = 0 \tag{6e}$$
$$m(T_2) = N \tag{6f}$$

$\Omega(s(t), \lambda) \equiv \frac{c - \lambda}{\eta s(t)^{\eta - 1}}$、$t_0$：最早到着時刻、$m(t)$：時刻$t_0$から$t$までの累積到着者数、である。以上の問題は、$\alpha(t)$を操作変数、$s(t)$、$m(t)$を状態変数とする一部状態量自由、始端時間自由の最適制御問題となっている。

(3) 市場均衡解

出発時刻に関する均衡解は最適制御問題(6a)-(6f)の最適解として与えられる。これを解くためにハミルトニアンを次のように定義する。

$$H = -\zeta_0 \alpha(t)^{\xi} + \lambda_1 \Omega(s(t), \lambda) + \lambda_2 s(t)\alpha(t) \tag{7}$$

λ_1、λ_2はそれぞれ制約条件(6b)(6c)の随伴変数である。ポントリャーギンの最大値原理より最適性の条件が得られる。これより、鉄道企業は操業時間を通じて輸送需要の潜在価格を一定の水準μに保つことが判る。ここで、λについての場合分けを考える。

$\lambda = 0$かつ$\tau \ge 0$の場合

Cを定数として以下の式が得られる。

$$s(t) = (ct + C)^{\frac{1}{\eta}} \tag{8}$$

$$\alpha(t) = \left(\frac{\mu}{\zeta_0 \xi} \right)^{\frac{1}{\xi - 1}} (ct + C)^{\frac{1}{\eta(\xi - 1)}} \tag{9}$$

$\lambda > 0$かつ$\tau = 0$の場合

輸送サービスの供給関数$Q(t) = s(t)\alpha(t)$は、均衡状態において$Q(t) = D(t)$であり、以下の式が得られる。

$$s(t) = \begin{cases} \left(\frac{\mu}{\zeta_0 \xi} \right)^{-\frac{1}{\xi}} (NA)^{1 - \frac{1}{\xi}} (2T_0 - t)^{-a(1 - \frac{1}{\xi})} \\ \left(\frac{\mu}{\zeta_0 \xi} \right)^{-\frac{1}{\xi}} (NA)^{1 - \frac{1}{\xi}} t^{-a(1 - \frac{1}{\xi})} \end{cases} \tag{10}$$

Shigeoki TANAKA, Kiyoshi KOBAYASHI, Makoto OKUMURA, Mitsuzo NAGANO

$$\alpha(t)=\begin{cases}\left(\frac{\mu NA}{\zeta_0\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}(2T_0-t)^{-\frac{a}{\xi}}\\ \left(\frac{\mu NA}{\zeta_0\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}t^{-\frac{a}{\xi}}\end{cases}\tag{11}$$

家計は、鉄道企業の決定した時刻別の輸送力に対して、無駄時間がないように出発するか混雑を避けて早めに出発するかを選択する。すなわち均衡状態では、$\lambda = 0$の状態から$\lambda > 0$の状態、あるいは$\lambda > 0$の状態から$\lambda = 0$の状態へと移り変わる時刻（切替点）が存在する。切替点やその他の定数は、目的関数である鉄道企業の費用関数を最小にするように定まる。

3. 規範的計画モデルの定式化

(1) 社会的厚生水準の改善

家計の出発時刻の選択に伴う通勤行動は通勤列車の混雑度の増加という外部不経済を生み出す。そのため、家計と鉄道企業の自由な選択行動の結果として到達する均衡状態は必ずしも社会的に最適なものではない。本研究では、そのような外部不経済を内部化することにより社会的に最適な状態に導くことを試みる。

(2) 鉄道企業の規制問題（計画モデル１）

まず、鉄道企業の行動のみ規制する場合を考える。企業行動を規制することは、交通システムマネジメント（ＴＳＭ）の導入を意味している。目的関数は、

$$\max_{\alpha(t)}\left[\int_{t_0}^{T_2}\left\{-\zeta_0\alpha(t)^{\xi}+s(t)\alpha(t)\left(-s(t)^{\eta}+ct\right)\right\}dt\right]\tag{12}$$

であり、制約条件は式(6b)-(6f)である。この問題のハミルトニアンを次のように定義して、ポントリャーギンの最大値原理を用いて解く。

$$\begin{aligned}H &= -\zeta_0\alpha(t)^{\xi}+s(t)\alpha(t)\left(-s(t)^{\eta}+ct\right)\\ &+ \lambda_1\Omega(s(t),\lambda)+\lambda_2 s(t)\alpha(t)\end{aligned}\tag{13}$$

$\lambda = 0$かつ$\tau \geq 0$の場合

Cを定数として以下の式が得られる。

$$s(t) = (ct+C)^{\frac{1}{\eta}}\tag{14}$$

$$\alpha(t) = \left(\frac{\mu-C}{\zeta_0\xi}\right)^{\frac{1}{\xi-1}}(ct+C)^{\frac{1}{\eta(\xi-1)}}\tag{15}$$

$\lambda > 0$かつ$\tau = 0$の場合

均衡状態では$Q(t) = D(t)$が成り立ち、これよりΛがtの関数として表されて$s(t)$、$\alpha(t)$が求められる。

切替点、t_0、C、μの値は、社会的厚生水準が最大になるように定められる。

(3) システム最適化問題（計画モデル２）

家計、鉄道企業の双方が規制される場合、計画問題は以下のように定式化される。

$$\max_{\alpha(t),s(t)}\left[\int_{t_0}^{T_2}\left\{-\zeta_0\alpha(t)^{\xi}+s(t)\alpha(t)\left(-s(t)^{\eta}+ct\right)\right\}dt\right]\tag{16a}$$

$$s.t.\quad \dot{m}(t) = s(t)\alpha(t)\tag{16b}$$

$$m(t) \geq \int_{T_1}^{t}N\Pi(t)dt\tag{16c}$$

$$m(t_0) = 0\tag{16d}$$

$$m(T_2) = N\tag{16e}$$

この問題のハミルトニアンを次のように定義する。

$$\begin{aligned}H &= -\zeta_0\alpha(t)^{\xi}+s(t)\alpha(t)\left(-s(t)^{\eta}+ct\right)\\ &+ \lambda_2 s(t)\alpha(t)+\lambda_3\left(m(t)-\int_{T_1}^{t}N\Pi(t)dt\right)\end{aligned}\tag{17}$$

ここでλ_2、λ_3は制約条件(16b)(16c)の随伴変数である。ポントリャーギンの最大値原理より最適性の条件が得られ、以下のような場合分けができる。

$\lambda_3 = 0$かつ$m(t) \geq \int_{T_1}^{t} N\Pi(t)dt$の場合

$\lambda_2 = const. \equiv \mu$が成り立ち、以下の式が得られる。

$$s(t) = \left(\frac{ct+\mu}{\eta+1}\right)^{\frac{1}{\eta}}\tag{18}$$

$$\alpha(t) = \left(\frac{\eta}{\zeta_0\xi}\right)^{\frac{1}{\xi-1}}\left(\frac{ct+\mu}{\eta+1}\right)^{\frac{\eta+1}{\eta(\xi-1)}}\tag{19}$$

$\lambda_3 > 0$かつ$m(t) = \int_{T_1}^{t} N\Pi(t)dt$の場合

$Q(t) = D(t)$より、以下の式が得られる。

$$s(t) = \begin{cases}(NA)^{\frac{\xi-1}{\eta+\xi}}\left(\frac{\eta}{\zeta_0\xi}\right)^{-\frac{1}{\eta+\xi}}(2T_0-t)^{-\frac{a(\xi-1)}{\eta+\xi}}\\ (NA)^{\frac{\xi-1}{\eta+\xi}}\left(\frac{\eta}{\zeta_0\xi}\right)^{-\frac{1}{\eta+\xi}}t^{-\frac{a(\xi-1)}{\eta+\xi}}\end{cases}\tag{20}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases}(NA)^{\frac{\eta+1}{\eta+\xi}}\left(\frac{\eta}{\zeta_0\xi}\right)^{\frac{1}{\eta+\xi}}(2T_0-t)^{-\frac{a(\eta+1)}{\eta+\xi}}\\ (NA)^{\frac{\eta+1}{\eta+\xi}}\left(\frac{\eta}{\zeta_0\xi}\right)^{\frac{1}{\eta+\xi}}t^{-\frac{a(\eta+1)}{\eta+\xi}}\end{cases}\tag{21}$$

切替点、t_0、μの値は、社会的厚生水準が最大になるように定められる。

4. 交通管理需要政策の効果（数値計算事例）

現在のところ各モデルの厚生比較について理論的な知見を解析的に求めることには成功していない。そこで、数値計算による比較を試みた。ここでは便宜的に各パラメータ値を$c = 0.1$、$N = 1000$、$\eta = 1.2$、$\xi = 3$、$\zeta_0 = 0.1$、$\bar{s} = 6$、$T_0 = 150$、$T_1 = 100$、$T_2 = 200$、$a = 10$と設定して計算した。ただし、計画モデル１については数値計算にも成功しておらず、均衡モデルと計画モデル２の厚生比較のみを行った。表１及び図１に結果を示してある。これによると、企業と家計の行動を規制することによって社会的厚生水準が改善されることが確認できる。

表１　社会的厚生水準の比較結果

	均衡モデル	計画モデル２
最早出勤時刻:t_0	72.7	73.1
切替点:t_k	158.5	150.0
利用者総効用:TU	5202.4	6266.1
総輸送費用:TC	161.2	261.4
社会的厚生水準:W	5363.6	6527.5

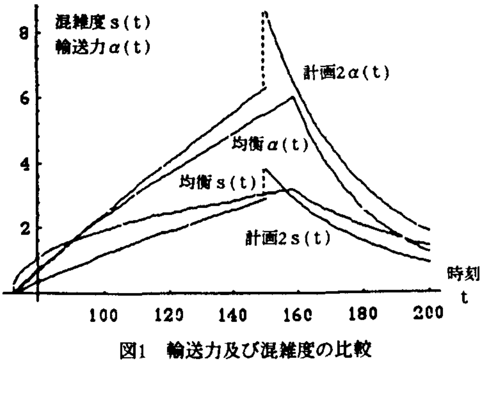

図1　輸送力及び混雑度の比較