第IV部門　　**グラフ理論を利用したPERT/MANPOWER手法の最適解法に関する開発研究**

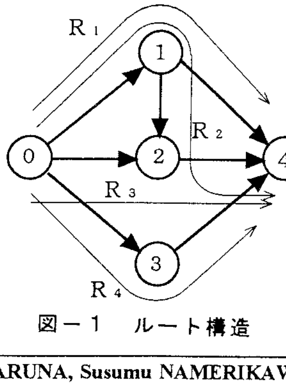
立命館大学　正員　春名　攻
立命館大学大学院　学生員　○滑川　達
立命館大学大学院　学生員　櫻井　義夫
立命館大学大学院　学生員　伊藤　壮央

1．はじめに

本稿では，各種資源の量的な制約のもとでのスケジュール作成方法について述べる．この種の問題の最適解を求めることは，問題の性質上，複雑な組合せ問題になるとともに，膨大な計算量を必要としたため，これまで実際にはその導出が不可能とされてきた．このため，本研究においては，これまでにネットワーク構造の特性分析とその結果をベースとしたネットワークスケジューリング理論を整理してきた．そして，今回この理論を効果的に適用した形でＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲタイプのスケジューリングモデルとその最適解法の開発を試みた結果，一定の完成域に達したものと判断したので，その内容について論じていくこととする．

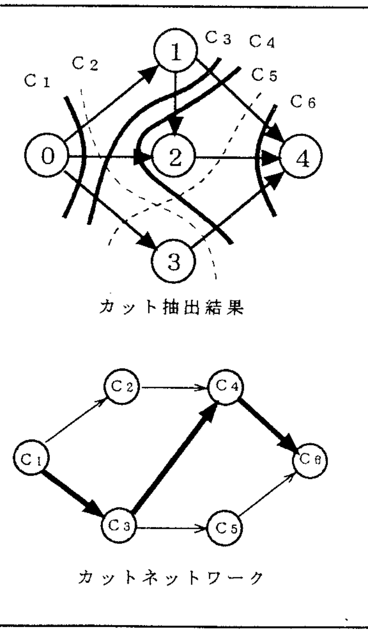
2．新しいネットワークスケジューリング理論

本研究では，まず与えられたネットワークを**図－1**のようなルート構造の集合として考える．このとき，一般のスケジューリング問題は複数経路の同時検討問題として捉えることができる．そして，このような問題の検討にあたっては，カット概念を用いることが効果的であることがわかっている．特に，ここで用いるカットは，ネットワークを形成する全ての経路を同時並列的に検討し得るカットとして求めることが要求される．そして，このようなカットは「ネットワークの始点から終点までの全経路をたかだか１回切断する」全てのカットに相当する．このとき，任意のカットに含まれる作業間には順序関係が存在していないことは明らかである．



図－１　ルート構造

しかし，単一のカット断面のみでは，経路の部分的な状態しか検討することはできない．すべての経路を全体的に検討していくためには，複数のカット間の構造関係にもとづく段階的な検討が必要である．カットをあくまでも同時作業が可能な作業の集合として求めなければならないが，このような全てのカット集合の間には，「作業の持つ順序関係が写像したカット間の順序関係」が保存されていることがわかる．このようなカット間の順序関係を工程の流れに沿って構造化すれば次のような特徴があることがわかる．すなわち，対象となるネットワークに含まれるすべての作業を網羅しかつ，カット間に交差のないカットをその順序関係とするネットワークとして求めると，**図－２**に示したような検討対象ネットワークを求めることができる．すなわち，対象ネットワークは，もとの工程ネットワークの作業間順序関係構造がトポロジカルに変換されて求められてい



図－２　カット構造とカットネットワーク

Mamoru HARUNA, Susumu NAMERIKAWA, Yoshio SAKURAI, Takeo ITO

ることが理解される（なお，このネットワークをカットネットワークとよぶこととする）．

このようなカットネットワークを求めることができれば，各作業の状態はこのネットワークの始点と終点を結ぶ１つのルートによって表現できることになり，問題の規範に対して最適解を与えるスケジュールは，カットネットワークにおけるもとのネットワークのルート状態の配分と最適経路選択の問題として表わすことができる．

３．ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲタイプのスケジューリングモデルの開発

（１）問題の定式化に関する検討

以下においては，先に示したスケジューリング理論を適用することにより，ＰＥＲＴ／ＭＡＮ − ＰＯＷＥＲタイプのスケジューリング問題を多段決定過程の動的計画問題(ＤＰ)として捉え，カットネットワークにおける配分時間問題として定式化していくこととする．また，カットネットワークにはイニシャルレベルを設定しておく．

いま，状態変数をネットワーク工程表を形成するすべての各ルートの実施状況，すなわち，

$$R_{e.cz} = (r^1_{e.cz},\ r^2_{e.cz},\ \cdots,\ r_{e.cz},\ \cdots,\ r^m_{e.cz})$$

$r^k_{e.cz}$；任意のレベルｅでかつレベルｅ＋１のカットｃ$_z$と順序関係をもつカットｃ$_y$におけるルートｋの実施日数

のようなm次元ベクトルとおく．ただし，

$$R_{e.cz} \in PR_{e.cz}$$

$PR_{e.cz}$；実行可能な実施状況パターンの集合
すなわち，ｃ$_y$がレベルｅ，ｃ$_z$がレベルｅ＋１であるとき，
$i \in c_y$ かつ $i \notin c_z$
$(c_y < c_z)$
である作業ｉが完了している実施状況パターンの集合

つづいて，決定関数を各レベルのカットへの配分日数として設定する．すなわち，決定関数を，

$$g_{e.cz}(R_{e.cz}) = g_{e.cz}(r^1_{e.cz},\ r^2_{e.cz},\ \cdots,\ r^m_{e.cz})$$

と表せば，この値はこのタイプの問題の目的が工期最小である以上，上記の条件を満たす作業ｉの最小完了時刻と考えることができる．以下においては，この時刻をカット断面とよぶ．ここで，すべてのレベル（１，２，・・・，ｎ）をとおしての各ルートの総実施状況パターン$WR_{(n)}$を

$$WR_{(n)} = (r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^k,\ \cdots,\ r^m)$$

ｎ；カットネットワークに設定されたレベルの総数

r^k；ルートｋの総実施日数

と表せば，以上の考え方を導入して ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲの定式化は，各レベルの決定関数値，つまりカットの配分日数の総和の最小として求められる．すなわち，

$$\text{minimize}\ f_n(WR_{(n)}) = \sum_{e=1}^{n} g_e(r^1_{e,cie},\ r^2_{e,cie},\ \cdots,\ r^m_{e,cie})$$

となる．また，このときの条件は，

$$r^k_{1,ci1},\ r^k_{2,ci2},\ \cdots r^k_{n,cin} \geqq 0 \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{e=1}^{n} r^k_{e,cie} = r^k \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$c_{i1} \prec c_{i2} \prec \cdots \prec c_{in-1}$$

$$c_{in} \in \phi$$

である．さらに，このとき上式の１からｎまでの各レベルが，フィードバックのないシステムとして捉えることができるカットネットワークにより設定されているので，ＤＰの基本原理である最適性の原理より，問題を，

$$f_n(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m) = \min_{\substack{0 \leqq r^k_{n,cin} \leqq r^k\ (k=1,2,\cdots,m) \\ c_{in-1} \prec c_{in}}} \{g_{n,cie}(r^1_{n,cin},\ r^2_{n,cin},\ \cdots,\ r^m_{n,cin}) + f_{n-1.cin-1}(r^1 - r^1_{n.cin},\ r^2 - r^2_{n.cin},\ \cdots,\ r^m - r^m_{n.cin})\}$$

のような繰り返しの関数方程式として定式化することができる．

(２)決定関数$g_{e.cz}$（$R_{e.cz}$）に関する検討

ここでは，上述定式化の決定関数$g_{e.cz}$（$R_{e.cz}$）の値を求める方法について検討を加える．しかし，カット断面単位ではこの値を求めることが不可能であるため，問題を作業断面単位まで分解した形で捉え，以降の検討を進めていくこととする．また，前述したように任意のカット構造に含まれる作業間に

は順序関係は存在しないので，ここでの問題は，並列ネットワークを対象とするスケジューリング問題と等価となることはいうまでもない．

いま，ダミーを除くカットに含まれる実作業の数を m とすれば，作業の実施状態が変化する時刻は，開始可能になった時刻にすぐさま作業を開始するものと仮定することにより（問題の目的を「工期最小」とした場合，この仮定には何ら矛盾は生じない），最大で（m＋1）個存在することは容易に理解できる．つまり，１つの作業に対して１つの終了時刻が対応することがわかる．したがって，終了時刻の数は最大でm個となるが，最初の作業の開始時刻の値が１つあるので，結局のところ最大で（m＋1）個の値（時刻）が求められることになる．そして，これらの時刻で表現され，スケジュール作成上必要となる時間区間の数は最大でm個となることがわかる．つぎに，この時間区間を I_k とすれば，作業 i が区間 I_k で実施されていることを表す変数として $a_{ik}=1$，そうでないときには $a_{ik}=0$ と表すと，各時間区間において同時刻に実施されている作業の組合せが，これらの変数の組合せとして求められる．このような作業の組合せをパターンと定義すると，このパターン P_k は，図－３に示したような m×m マトリックスの列ベクトルとして求められることは明かである．また，各区間 I_k の長さ，すなわち各区間の作業時間を x_k で表すと，これらの a_{ik}，x_k，作業の所要時間 d_i の間には，

$$\sum_k a_{ik}\cdot x_k=d_i,\ (i=1,2,\cdots,m),$$

$$a_{ik}\in\{0,1\},$$

$$x_k\geqq 0,$$

$$d_i\geqq 0,$$

d_i；作業 i の作業日数．

のような関係が成立する．もちろん，各パターンが使用する資源数に関する制約条件

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\cdot w_{il}\ \leqq\ W_l,$$

w_i；作業 i が必要としている種類 l の資源数，

W；種類 l の資源制約数．

を満たしていなければならないことは明かである．また，完了時刻 λ は次式のように表される．

$$\lambda=\sum_{k=1}^{m} x_k,$$

以上のことから並列ネットワークの場合の（カット内の）PERT／MANPOWERの問題は，

$$\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\cdot x_k=d_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\cdot w_i\ \leqq\ W,$$

$$x_k\geqq 0,$$

$$(k=1,2,\cdots,N),$$

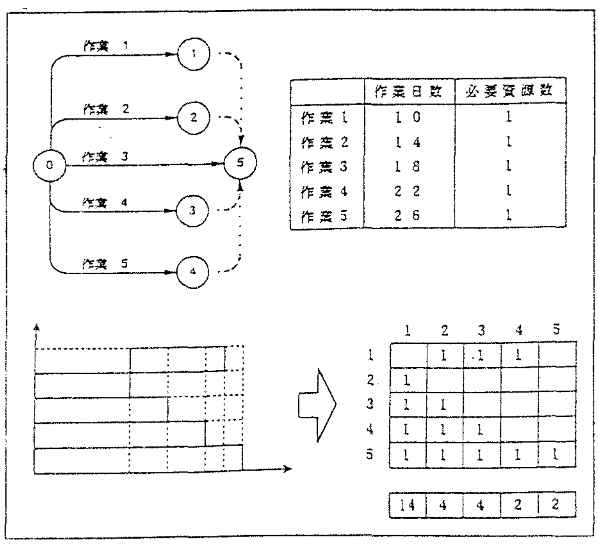
$$(i=1,2,\cdots,m),$$

の制約条件のもとで，

$$\lambda=\min\ \sum_{k=1}^{N} x_k,$$

を求める問題として定式化される．ここで，Nは考えられるすべてのパターンの数を表すものとする．

さて，カットに含まれる作業があまり多くない場合には，定式化において示したすべてのパターンをあらかじめ求めておくことは困難なことではない．そして，この問題はシンプレックス法により最適解を求めることができる．ここで，パターンの組合せとして求められるスケジュールは，基底行列 B として表される．しかし，カットに含まれる作業の数が多くなると，パターンの数は幾何級数的に増大するので，あらかじめすべてのパターンを求めることは



	作業日数	必要資源数
作業 1	10	1
作業 2	14	1
作業 3	18	1
作業 4	22	1
作業 5	26	1

	1	2	3	4	5
1		1	1	1	
2	1				
3	1	1			
4	1	1	1		
5	1	1	1	1	1
	14	4	4	2	2

図－３　作業実施状況のマトリックス化

困難となる．たとえ求められてもそれだけで計算量が非常に多量になる．このため，以下においては，この種の問題をCutting-Stock問題と捉え，列生成法を用いた解法を示すこととする．すなわち，すべてのパターンを暗に対象としつつ，基底行列に新しく導入されるパターン $\boldsymbol{p}_u$ を，

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{m} w_{i1} a_i \leqq W_1 \\ a_i = 1 \text{あるいは} 0\end{array}\right\}$$

の制約条件のもとで，

$$U_u = \max \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i$$

を与えるような $\{a_i\}$ を求める補助問題を解くことにより決定する．ここで β_i は上述定式化における目的関数の係数値がすべて１であるため $c_j = 1$ となり，

$$\beta_i = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{jii}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = (\beta_{jii}),$$

として容易に求められる．

定式化から明らかなように，このような補助問題は0-1整数計画（Integer Programming）の問題と呼ばれ，一般的にはナップサック問題としてよく知られている．本研究では，ナップサック問題の最も一般的な解法の一つであるＤＰを用いてこの補助問題を解くこととした．

つぎに，このような補助問題を用いた線形計画の解法を示すとつぎのようである．

ステップ１．一つの実行可能なスケジュール $\boldsymbol{B}$（基底行列）を求める．

ステップ２．基底行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求める．

ステップ３．補助問題をＤＰを用いて解き $U_u = \max_k \{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k\}$ を求める．$U_u \geqq c_u$ ならば最適解が求められているので計算を終了する．$U_u < c_u$ ならばステップ４に進む．

ステップ４．$\overline{\boldsymbol{P}}_k = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k$ および $\overline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$ を計算する．

$$\overline{\boldsymbol{P}}_k = \begin{pmatrix}\overline{a}_{1k}\\ \vdots \\ \overline{a}_{mk}\end{pmatrix}$$

ステップ５．

$$\frac{\overline{d}_r}{\overline{a}_{ru}} = \min_i \frac{\overline{d}_i}{\overline{a}_{iu}\ (>0)}$$

を与える $\overline{a}_{ru}$ を求める．

ステップ６．$\overline{a}_{ru}$ をピボット係数として消去計算をおこない，新しい基底行列 $\boldsymbol{B}$ を求め，ステップ２にもどる．

以上のようにして，任意のカットに含まれる作業群を対象とした最小の完了時刻を求めることができるが，この値を直接，決定関数値として用いることはできない．すなわち，ここでの決定関数値がカット断面の時刻であるため，以下のような処理を加えることにより，前述ＤＰ問題における決定関数値を求める必要がある．いま，基底行列として求められたパターンにおいて，

$$i \notin c_y \text{ かつ } i \in c_z \quad (c_y < c_z)$$

となる作業が１つでも実施している，すなわち，$a_{ik'}=1$ となるパターン $I_{k'}$ のみを抽出し，

$$\lambda' = \sum_{k=1}^{M} x_{k'},$$

を決定関数値 $g_{e,cz}$（$R_{e,cz}$）として求めればよいこととなる．ここで，Ｍは抽出されたパターンの数を表すものとする．結果として，この値が最小のカット断面の時刻となることは明かである．そして，カットネットワークの最適経路探索を前述のようにＤＰを用いて実施することにより，プロジェクト全体の最小工期を求めることができる．なお，このときのスケジュールは，当然上で抽出した各段階のパターンの合成として求めることができることとなる．

４．おわりに

本稿では，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲタイプのスケジューリングモデルとその最適解法の開発をおこなった．また，本研究においては，提案したモデルの適用計算も実施しているが，その結果については紙面の関係上，発表時に示すこととする．

【参考文献】

1)春名,山田,滑川；グラフ理論にもとづく経路探索問題に関する理論的研究，土木学会関西支部年次学術講演概要，1994,5

2)春名,滑川；ネットワーク工程表の構造特性分析と最適工程計画モデル構築に関する理論研究，土木学会建設マネジメント研究論文集Vol.4，1996,11