

神戸大学工学部 正会員 中山 昭彦
神戸大学大学院 学生員 ○福知 正高

1. はじめに

近年、より一般的な流れ場に適用できる低レイノルズ数乱流モデルが数多く提案され、直接シミュレーション等によりその精度が確かめられている。しかし、計算例は非常に単純な流れがほとんどで、剥離の伴う流れや自由水面を有する流れでの検証は十分になされていない。そこで、本研究は、自由水面の動きを直接解く手法に最近の低レイノルズ数乱流モデルで高く評価されているものを組み込み、数値計算を行い検証した。乱流モデルとしては河床の複雑な形状周りにも適用可能な低レイノルズ数型モデルである低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデル¹⁾及び近年良い結果が得られているとされる川島・河村²⁾により提案されたモデルを適用した。

2. 計算法

非圧縮二次元非定常流を対象とする、低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデル及び川島・河村モデルを適用した場合の流れの基礎方程式と自由水面の動きを直接解く手法として高さ関数法³⁾を用いた場合の自由水面における条件を以下に示す。鉛直軸方向には重力加速度が働いているとし、運動方程式に重力加速度 g を加えている。

連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

運動方程式

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - u_i v_j \right) - g \delta_{i2}$$

レイノルズ応力

$$\overline{u_i v_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデル

$$\nu_t = \alpha \frac{k}{\omega}$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \beta^* k \omega$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \alpha \frac{\omega}{k} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2$$

川島・河村モデル

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - (\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}) - \frac{1}{2} \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left(C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \frac{\tilde{\varepsilon} \hat{\varepsilon}}{k} \right) + C_{\varepsilon 3} \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right)^2$$

ここで、 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon}$ であり $\hat{\varepsilon}$ は以下の通りである。

$$\hat{\varepsilon} = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 : \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \geq 0, \quad \hat{\varepsilon} = 0 : \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} < 0$$

なお α 、 α^* 、 β^* 等のモデル定数、 f_μ 等のモデル関数についての詳細は参考文献にて確認されたい。

自由水面における条件

運動学的条件

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (1)$$

動力的条件

$$\begin{aligned} p_h &= p_0 \\ \tau_h &= 0 \end{aligned}$$

p_h : $y=h$ における圧力

p_0 : 大気圧

τ_h : $y=h$ におけるせん断応力

(2)

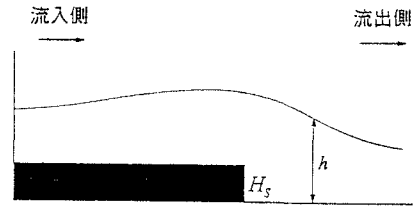


図-1 計算例

数値計算は、直交食い違い格子で、圧力場と速度場に分解し、HSMAC 法に基づく時間発展解法で解く。その中で、自由水面における条件式(2)はそれぞれ圧力、速度の境界条件として与え、新しい時間での速度場が求まった後に条件式(1)をオイラー法により時間積分し、新しい時間での自由水面の位置を決定する。時間に関する進行は一次精度のオイラー法、粘性項には二次精度の中心差分を用いている。

計算例

河床が複雑な場合としていくつかのケースについて試みているが、今回は、図-1のようなステップ高さ $H_s=2\text{cm}$ を持つバックステップがあるケースについて報告する。瀬津ら⁴⁾の実験結果と比較するために初期条件は、上流水深 $h/H_s=3.7$ 、水面下を静水圧、 H_s を基準として $Re=3544$ 、下流フルード数 $F_{r2}=0.20$ とし、10 ステップ上流で対数則分布を流入条件として与えている。

計算結果と考察

低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデルによる流線の計算結果を図-2 に示す。実験結果にみられるような循環領域が見てとれる。

低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデルを用いた場合のバックステップ下流の水深変化 $\Delta h \equiv (h-h_0)$ (ここで h_0 は $x=0$ での水深) を図-3 に示す。瀬津らの実験結果とは完全には一致していないが、定性的に同じ傾向を示している。

次に低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデルを用いて得られた平均流速 U と乱流エネルギー k の計算結果と瀬津らの実験結果とを比較したものを図-4、図-5 に示す。平均流速 U の計算値は実験値と非常に良く一致している。乱流エネルギー k の方も同様に良く一致している。

これらの計算結果から低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデルは摩擦速度、壁面までの距離等の量を用いなので自由水面やバックステップなどの複雑な境界にも簡単に適応でき、かつ精度も良いことが解った。粗面等にも簡単に適応可能なので、更なる応用が期待される。

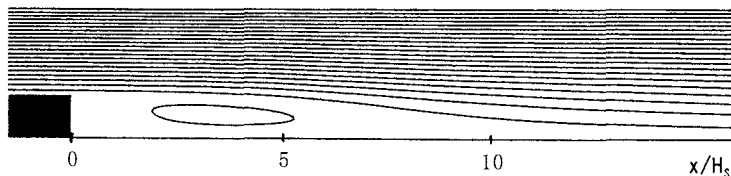


図-2 流線

○ : 瀬津らによる実験値 — : 低レイノルズ数版 $k-\omega$ モデルによる計算値

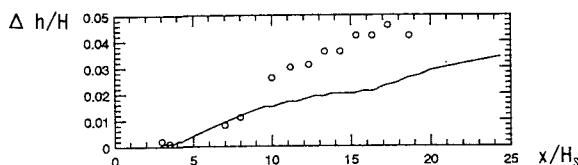


図-3 ステップ下流の水深変化

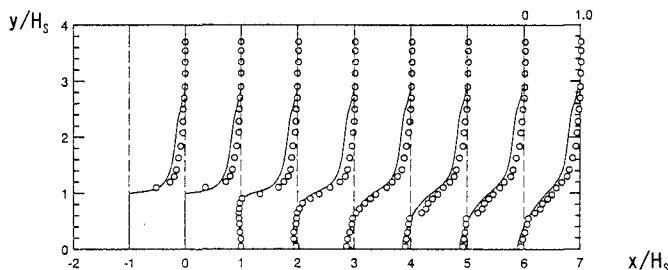


図-4 平均流速 U の分布

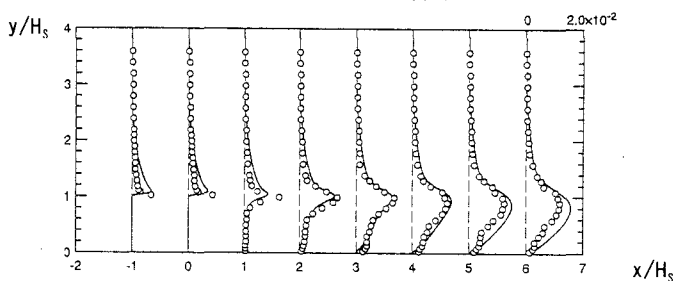


図-5 乱流エネルギー k の分布

参考文献

- 1) Wilcox, D.C. : Turbulence Modeling for CFD, pp146-160, 1993.
- 2) 川島紀英、河村 洋 : $k-\epsilon$ モデルによる吹き出し・吸い込みを伴うチャンネル内流の数値計算、第27回乱流シンポジウム講演論文集、1995、pp.239-242.
- 3) Hirt, C.W. and Nichols, B.D. : J. Computational Physics, Vol39, pp202-203, 1981.
- 4) 瀬津 家久、中川 博次 : 開水路段落ち流れの乱流構造に関する実験及び数値計算、第33回水理講演会論文集、1989、pp.469-474.