境界積分方程式の高速解法について

京都大学工学研究科	正	西村直志
京都大学大学院	非	竹内孝文
京都大学大学院	非	中野秀俊
京都大学工学研究科	フェロー	小林昭一

1 序

境界積分方程式法は境界のみに未知関数が発生するため、当初は効率の良い数値解法であることが期待されたが、行列が密になる事が障害となり、その適用は案外小さい問題に限られてきた。ところが、最近、多重極展開を用いた解法が提案され [1][2]、パソコン程度の計算機でも数万元規模の問題の解析が可能になってきた。本報では 2 次元 Laplace 問題における高速解法として多重極展開法と wavelet による方法を取り上げる。前者は、クラック問題への適用を検討し、後者では Galerkin 法による解法において wavelet 基底の使用が問題をどの程度縮小するかを検討した。

2 多重極展開法

今、簡単のため、2 次元全平面の中に、一般には複数の互いに交わらない曲線からなるクラック S が有るとする。Laplace 方程式のクラック問題は次の境界値問題の解を求めることに帰着される。

$$\Delta u=0 \quad \text{in } R^2, \qquad \frac{\partial u^{\pm}}{\partial n}=0 \quad \text{on } S, \qquad u\to u_\infty \quad \text{as } |x|\to\infty$$

ここに u_∞ は漸近場であり、全平面で Laplace を満たす。また、上付きの+ (−) は S の法線が向く側からの極限、ないしはその反対を指す。この問題の解、および解くべき積分方程式は

$$u(\boldsymbol{x})=u_\infty(\boldsymbol{x})+\int_S\frac{\partial G}{\partial n_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS \text{ in } R^2\setminus S, \quad 0=\frac{\partial u_\infty}{\partial n}(\boldsymbol{x})+\int_S\frac{\partial^2 G}{\partial n_x\partial n_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS \text{ on } S \qquad (1)$$

となる。ここに、φ は開口変位であり、G は Laplace 方程式の基本解である。

さて、今、S を要素に分割し、各要素上で φ が一定であるとする。このとき、$\boldsymbol{x}$ が S から十分離れているとすると次の近似が成り立つ。

$$\int_S\frac{\partial^2 G}{\partial n_x\partial n_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS\sim \mathrm{Re}\left((n_1(\boldsymbol{x})-in_2(\boldsymbol{x}))\frac{i}{2\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{X}^{i+1}}A_i\right), \quad A_i=\sum_k(\bar{\xi}^i_{k2}-\bar{\xi}^i_{k1})\varphi_k \qquad (2)$$

ここに、X は原点を適当に選んだうえで、$\boldsymbol{x}$ を表す複素数、ξ^i_{k1}、ξ^i_{k2} はそれぞれ k 番目の要素の両端を表す複素数、φ_k は k 番目の要素の上での φ の値である。今、φ_k が全て求まっているものとする。S を内部に含む正方形領域を取り、これを縦横それぞれ 2 等分して 4 つの正方形領域に分ける。この操作を繰り返し、各正方形に含まれる要素の数が既定値より小さくなるか、2 等分の回数が既定値を越えるかしたところで分割を修了する。このように分割したうえで、(1) に含まれる積分のうち、ある $\boldsymbol{x}$ から遠い要素からの影響は、その要素を含み十分大きい正方形のなかの要素からの寄与として (2) を用いてまとめて評価する。そうでないものについては従来法によって直接積分計算により計算する。このようにして、既知の φ に対して (1) に含まれる積分を評価することが出来る [1][2]。従って、連立方程式の solver として反復解法を選べば、上記の方法により、効率良く積分方程式の近似解を求めることが出来る。このようにしてクラック問題を解いた例の未知数の数と全計算時間を表 1に示した。クラックは単一とし、u_∞ は座標の一次関数とした。方程式の解法としては、前処理付きの GMRES を用いた。使用した計算機は実メモリーを 24MB しか持っていないがかなり高自由度まで実用的な計算時間で計算を行うことが出来た。なお、精度についても非常に高精度であった。

Naoshi NISHIMURA, Takafumi TAKEUCHI, Hidetoshi NAKANO, Shoichi KOBAYASHI

表 1: CPU 時間 (sec)

自由度	200	500	800	2000	3000	8000
従来法	6.06	92.74	385.78			
多重極	7.4	32.65	63.55	288.85	524.15	2236.36

3 ウェーヴレット基底を用いた Galerkin 積分方程式法

簡単のために有界領域 D における Dirichlet 問題を考える。このとき境界での未知関数 $\partial u/\partial n$ に基底関数 N_i を導入すれば、解くべき積分方程式は離散化されて

$$\int_{\partial D} N_i(\boldsymbol{x}) \int_{\partial D} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) N_j(\boldsymbol{y}) dS dS q_j = \int_{\partial D} N_i(\boldsymbol{x}) \left(\frac{u(\boldsymbol{x})}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y}) dS \right) dS \tag{3}$$

となる。ここに q_i は $\partial u/\partial n \sim N_i q_i$ となるような未知パラメータであり、総和規約を適用した。さて、ここで基底関数を次のように構成される、Haar の wavelet とする。(i) ∂D 上に n 個の区分一定要素を取り、それぞれを N_i^0 と書く。(ii)N_i^0 が 0 でない区間を 2 等分し、その 1 つ目の区間で 1、残りの区間で -1 となる様な関数を N_i^1 とする。(iii) N_i^I が構成されているとき、N_i^I の非 0 区間を 2 等分して、その各々に N_i^I に相似な基底関数 N_{2i-1}^{I+1}、N_{2i}^{I+1} を取る。(iv) このようにして構成される基底関数の全体を N_i とする。

上記 wavelet 基底を用いた場合、(3) に表れる係数は

$$\left| \int_{\partial D} N_i^I(\boldsymbol{x}) \int_{\partial D} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) N_j^J(\boldsymbol{y}) dS dS \right| < C \mathrm{dist}(N_i^I, N_j^J)^{-2} 2^{-I-J}$$

を満たす。ここに C は定数であり、$\mathrm{dist}(N_i^I, N_j^J)$ は、それぞれの基底関数の台の間の距離である。このように wavelet 基底を用いると通常の基底による Galerkin 法に比べ係数の大きさの距離減衰のオーダーが 2 だけ増え、通常よりも優対角性が卓越する。従って、$\mathrm{dist}(N_i^I, N_j^J)^{-2} 2^{-I-J} < \epsilon$ を満たす係数を計算せずに 0 と置き換えても得られる解はあまり変わらないことが期待できる。ここに、ϵ は正の定数である。

このような解法により得られた解析効率の向上を表 2にまとめた。解析した例では、領域は半径 2 の円であり、Dirichlet data は $u = \cos\theta$ とした。ここに θ は中心角である。未知数の個数は 512 であり、係数行列の成分は 262,144 個有る。これより、精度を殆ど損なわず行列の成分の大部分を 0 に置き換えてしまうことが出来ることが分かる。

表 2: wavelet-Galerkin 法の解析効率

ϵ	1×10^{-5}	5×10^{-5}	1×10^{-4}	5×10^{-4}	1×10^{-3}
$\partial u/\partial n$ の相対誤差 (%)	7.26×10^{-7}	1.98×10^{-4}	9.88×10^{-2}	1.59×10^{-1}	217
0 と置き変わった要素数	135680	195984	212744	235168	240324

参考文献

[1] 山田賢志、速水謙: BEM テクノロジーコンファレンス論文集 5 (1995) 59–64.

[2] 福井卓雄、服部純一: 計算工学講演会論文集 1 (1996) 319–322.