第Ⅰ部門　　正準変量解析法を用いた構造システムの振動シミュレーション

京都大学防災研究所　正　員　佐藤忠信
京都大学大学院　学生員　○横洲弘武

1.概説

従来の構造同定法としては、伝達関数モデルのパラメータを求め、カルマンフィルタなどを用いることにより状態量を決定する方法であったが、本研究では与えられた入出力データか直接的に状態量を求め、その後状態空間モデルを同定する手法、正準変量解析法（CVA:Canonical Variate Analysis）について展開する。状態量の決定には特異値分解を用いている。

2、正準変量解析法

正準変量解析は、赤池の確率実現の理論に応用された後、予測問題やモデルの低次元化などの様々な問題に応用されている。ここでは、そのうちLarimoreによって確立された状態空間モデルへの応用結果をもとに同定問題をCVAの立場から考慮し、推定を行う。正準変量解析について簡単に述べると、２つのスカラー変数を最大にするようにパラメータを決定していく手法である。通常は構造同定においては状態量として速度応答、変位応答を用いるのであるが、上に述べた性質を利用することにより加速度応答も状態量として用いることができることに特徴がある。

3、構造同定手法

まず最初に（１）式および（２）式に示すシステムの状態方程式と観測方程式を考える。次にあらかじめ与えられている過去、未来の情報をあらわす２つの時系列 $p(t)$ および $f(t)$ についてこれらの共分散行列の推定値 $\hat{\Sigma}_{pp}$、$\hat{\Sigma}_{ff}$ を計算する。（３）式の一般化SVDを考え、これらを解くためにまず、$\hat{\Sigma}_{pp}$、$\hat{\Sigma}_{ff}$ の固有値および固有ベクトルを計算する。次に（４）式で表されるSVDを計算し、$U=U_1^T\hat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}{}_{pp}$ と置く。そして(５)式で与えられるメモリー関数 $\mu(t)$ を計算する。ここで $\mu(t)$ は未来を予測するために必要なデータのもつ情報を縮約したものであるから、時刻 t における状態量を

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{2}$$

$$U\hat{\Sigma}_{pf}V^T=diag(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$$
$$U\hat{\Sigma}_{pp}U^T=I_l\,,\,V\hat{\Sigma}_{ff}V^T=I_k \tag{3}$$

$$\hat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}{}_{pp}\hat{\Sigma}_{pf}\hat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}{}_{ff}=U_1S_1V_1^T$$
$$U_1U_1^T=I_{l'}\,,\,V_1V_1^T=I_{k'} \tag{4}$$

$$\mu(t)=\begin{bmatrix}I_n & 0\end{bmatrix}Up(t) \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix}\mu(t+1)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T^{-1}AT & T^{-1}B\\ CT & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu(t)\\ u(t)\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\theta=\begin{bmatrix}T^{-1}AT & T^{-1}B\\ CT & D\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\hat{\theta}=\left(\frac{1}{N'}\sum_{t=l+1}^{N-k+1}\begin{bmatrix}\mu(t+1)\\ y(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu^T(t) & u^T(t)\end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{N'}\sum_{t=l+1}^{N-k+1}\begin{bmatrix}\mu(t)\\ u(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu^T(t) & u^T(t)\end{bmatrix}\right)^{-1} \tag{8}$$

表していることになる。しかし $\mu(t)$ の共分散行列は単位行列に規格化されているので、ある正則変換 T を用いることにより状態ベクトルは $x(t)=T\mu(t)$ と表される。これを（１）式、（２）式に代入すると（６）式が得られる。ここで θ を（７）式で定義し、（６）式に最小２乗法を適用することにより θ の最適推定値が（８）式で表される。

$x(t)$	：n次元状態量ベクトル
$y(t)$	：p次元出力ベクトル
$u(t)$	：m次元入力ベクトル
A,B,C,D	：パラメータを表す行列
U,U_1	：左特異行列
V,V_1	：右特異行列
γ	：特異値
S_1	：対角要素に特異値が並ぶ行列
l,k	：過去および未来の情報を表す係数

$$N'=N-k-l+1\,,\,l'=l(p+m)\,,\,k'=k+p$$

4.解析手法および同定結果

本研究では図１に示すような線形３自由度モデルを用い、状態量としては加速度応答を用いることにする。まず応答計算を行うわけであるが、ここで用いる数値

Tadanobu SATO , Hiromu YOKOSU

積分法としてはNewmarkのβ法とし、入力地震動としては、El Centro地震加速度観測記録を採用する。解析の時間刻みは0.01秒とし、5375ステップ、つまり53.75秒間を対象とする。モデルの諸元は質量$m=1.0\,(kgfs^2/cm)$、粘性減衰定数$c=0.4\,(kgfs/cm)$、剛性$k=100.0\,(kgf/cm)$とする。得られた応答結果に、周波数帯域0から25Hzのホワイトノイズを付加して観測波形をCVAを用いて構造システムの同定を行う。ここでは1、3階の加速度応答値が得られたとして2階の加速度応答値の同定を行う。また、得られた同定値を用いて、状態空間モデルにより応答計算を行い、その再現性について検討する。

まず、ラグと進みを表す定数l,kについてであるが未来のデータを多くとるより、過去のデータを多くとったほうが現実的であるので常に$l\geq k$が成り立つようなl,kを選定した。ここでは$k=2$に固定し、lを変化させて同定を行った。$l=2,3,4$の時における同定結果をそれぞれ図2、図3、図4に示すが以下の図では太線が真の波形、細線が再現波形を示す。次に観測ノイズの影響を調べるため観測データである加速度応答にそれぞれの最大加速度の5、10%に相当するホワイトノイズを加えて同定を行った。ここでは再現波形が真値に近い値を示している$l=4,k=2$を対象にして加速度応答波形の再現性の比較を行った。観測ノイズ5%、10%の時における再現波形をそれぞれ図5、図6に示す。

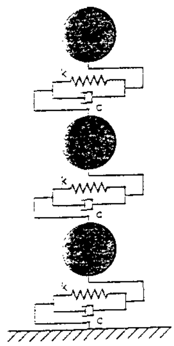

図1　線形3自由度モデル

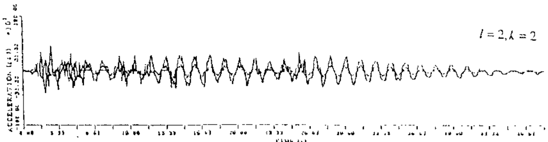

図2　同定された状態空間モデルによる再現波形（加速度応答、2階）

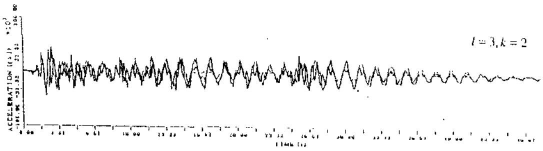

図3　同定された状態空間モデルによる再現波形（加速度応答、2階）

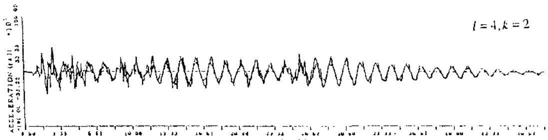

図4　同定された状態空間モデルによる再現波形（加速度応答、2階）

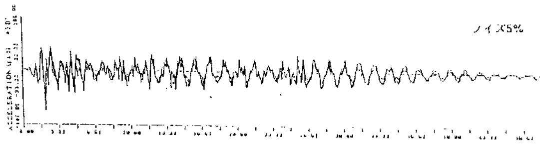

図5　同定された状態空間モデルによる再現波形（ノイズ5%、加速度応答、2階）

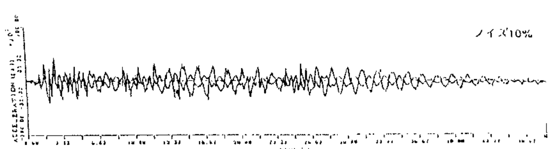

図6　同定された状態空間モデルによる再現波形（ノイズ10%、加速度応答、2階）

5、結論

以上から、ノイズが含まれない場合については正準変量解析法を用いることにより、再現波形を精度良く推定できることがわかった。また観測値にノイズが含まれる場合についても同様に解析を行ってみたが、結果として観測ノイズ5%ではあまり推定波形に影響は見られないが10%にすると大幅に再現波形が乱れた。これよりCVA法は加速度応答においてはノイズ5%ぐらいならば影響は受けにくいがノイズ10%になるとノイズの影響が見られることがわかる。通常はノイズ5%ぐらいになると再現波形に影響が見られる場合が多いのであるが、CVA法ではその影響があまりみられないことからも、ノイズに対して強いことがわかる。