第IV部門　　**工期制約を考慮した日程短縮型スケジューリングモデルの開発**

立命館大学　正　員　春名　攻
立命館大学大学院　学生員　滑川　達
立命館大学大学院　学生員　○櫻井　義夫

1．はじめに

本研究においては，施工計画の中核を構成すると考えられる工程計画に着目し，工程計画策定をより一層合目的かつ容易なものとするための計画モデル理論の開発をおこなった．特に本論文では，ある決められた制約工期に対して最小のプロジェクト費用によって実行可能な工程計画案を検討することができるスケジューリングモデル理論を提案する．なお，この理論は，上述のような施工計画段階での検討作業はもちろんのこと，施工実施段階におけるフォローアップ作業への適用にも十分耐えうるものであることを付け加えておく．

2．検討対象ネットワークに関する考察

一般に工程ネットワークには，上述のような日程の短縮計画において，検討の対象とはなり得ない作業が存在している場合が多い．このため，本研究においては，まず短縮のための検討対象作業を限定することが合理的であると考えた．すなわち，以下のような段階をとおしてネットワーク簡略化の可能性を検討することとした．なお，ここではネットワークの経路に注目することによりその簡略化を考えており，そのための経路の抽出方法については参考文献1)を参考されたい．

①必要短縮日数に対する(大成)リミットパスの抽出
②ダミー作業あるいは短縮困難な作業を含み，かつ他の作業間順序関係を変化させない経路の排除
③いかなる短縮パターンにおいてもクリティカルパスになり得ない経路の排除

そして，本研究では上述のような検討方針にもとづいたネットワーク簡略化のためのシステマティックな方法についても開発をおこなっているが，これらの方法の詳細に関しては，紙面の関係上発表時に示すこととし，本論文では図-1のような簡略化の結果，短縮計画の検討に値しうる必要最小限の作業のみで構成されるネットワークが求められた時点より議論を進めていくこととする．なお，このネットワークを以後，短縮対象ネットワークとよぶこととする．

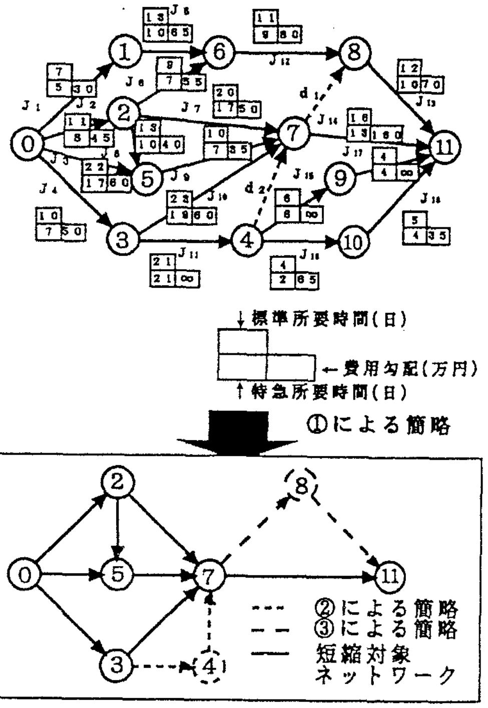

図-1 例題工程ネットワークと短縮対象ネットワーク

3．新たな問題定形化に関する検討

さて，図-1に示した短縮対象ネットワークを換言すれば，短縮が必要な経路のみで形成されているネットワークであるといえる．すなわち，この種の工程計画の問題は複数経路の同時短縮問題と捉えることができる．そして，このような問題の検討に当たっては，カット概念を発展させることにより本研究がこれまで開発を進めてきたネットワークトポロジー理論を適用することが効果的と考えた．このネットワークトポロジー理論の詳細については参考文献2)に譲ることとするが，この理論の適用により図-2に示すような短縮対象ネットワークの作業間順序関

Mamoru HARUNA, Susumu NAMERIKAWA, Yoshio SAKURAI

係をトポロジカルにカット間の順序関係として写像したカットネットワークの作成を可能とするものである．なお，図-2に示したカットネットワークには，従来より関係行列を利用したプロジェクトグラフの作成法に採用されている考え方を用いてターミナルレベルの設定を施している．

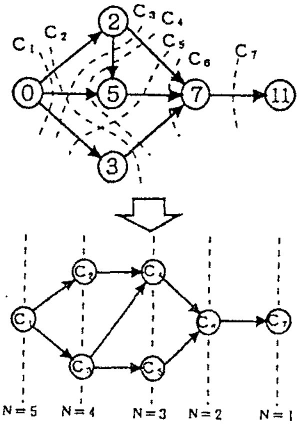

図-2 カットネットワーク

このとき，カットネットワークにおける任意の経路に注目すれば，その経路は短縮対象ネットワーク上の全ての作業を含んでいるとともに，流れの状態が多段階的でかつ直列につながったフィードバックのないトラジェクトリーとして考えることができる．すなわち，この経路を対象として各カットに最適な短縮日数を割当てていくことは，多段決定過程を考えた最適化問題を解くことと等価なものになるのである．

4．問題の定式化に関する検討

以下においては，これまでの議論に従って作業日程短縮型のスケジュール問題をカットネットワークにおけるｎ段の多段決定過程としての動的最適化問題としてとりあつかうことにより，問題をＤＰを用いて定式化していくことにする．

いま，ＤＰにおける状態変数を

$$R_e = (r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^k{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

$r^k{}_e$；任意のレベルｅにおける経路ｋの短縮日数
ｍ；短縮対象ネットワークに存在する経路の総数

のようなｍ次元ベクトルとして記述していくことにする．なお，ＤＰにおいては，各段階における過程の状態は，その段階で実行可能な状態でなければならない．すなわち，ＤＰでいうところの各段階における方策は実行可能でなければならないため，状態変数R_eは，以下の関係を満足していなければならない．

$$R_e \in PR_e$$

PR_e；レベルｅにおいて実行可能な短縮状況パターンの集合

つづいて，決定関数を各段の短縮費用として設定する．いま任意のレベルｅにおける状態変数R_eのもとで必要となる短縮費用を

$$g_e(R_e) = g_e(r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

と表わせば，この$g_e(R_e)$の値は

$$g_e(R_e) = g_e(r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^k{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

$$= \sum_{(i,\,j)\in P_c} \left[\frac{\sum_{k=1}^{m} a_{k.(i,\,j)} \cdot C_{(i,\,j)}(r^k{}_e)}{\sum_{k=1}^{m} a_{k.(i,\,j)}} \right]$$

（ｉ，ｊ）；作業
P_c；レベルｅに設定されたカットｃに含まれる作業の集合
$a_{k.(i,\,j)}$；短縮対象ネットワークより作成したルート行列の構成要素
$C_{(i,\,j)}(r^k{}_e)$；作業（ｉ，ｊ）を$r^k{}_e$短縮したときに要する費用

と表わせる．なお，上式の集合P_cは，短縮対象ネットワークのカット行列におけるカットｃの行ベクトルに着目して，その構成要素$b_{c.(i,\,j)}=1$となる作業の集合として求めることができる．そして，上式においてある１つの状態変数R_eを設定すれば，決定関数$g_e(R_e)$の値がただ１つ算出できる．これは，ＤＰを適用する上での重要な条件の１つである．

ここで，すべてのレベル（1，2，…，n）をとおしての各経路の総短縮状況パターン$WR_{(n)}$を

$$WR_{(n)} = (r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^k,\ \cdots,\ r^m)$$

ｎ；短縮対象ネットワークに設定されたレベルの総数
r^k；経路ｋの総短縮日数

と表わせば，計画全体での総短縮費用$f_n(WR_{(n)})$は，各レベルの決定関数値，つまり短縮費用の総和として求められる．すなわち，

$$\begin{aligned} f_n(WR_{(n)}) &= f_n(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m) \\ &= g_1(r^1{}_1,\ r^2{}_1,\ \cdots,\ r^m{}_1) \\ &\quad + g_2(r^1{}_2,\ r^2{}_2,\ \cdots,\ r^m{}_2) \\ &\quad + \cdots + g_n(r^1{}_n,\ r^2{}_n,\ \cdots,\ r^m{}_n) \end{aligned}$$

と表わすことができ，問題はこれを最小にすることである．また，このときの条件は，

$$\begin{array}{ll} r^1{}_1,\ r^1{}_2,\cdots,\ r^1{}_n \geqq 0 & r^1{}_1+r^1{}_2+\cdots+r^1{}_n = r^1 \\ r^2{}_1,\ r^2{}_2,\cdots,\ r^2{}_n \geqq 0 & r^2{}_1+r^2{}_2+\cdots+r^2{}_n = r^2 \\ \vdots & \vdots \\ r^m{}_1,\ r^m{}_2,\cdots,\ r^m{}_n \geqq 0 & r^m{}_1+r^m{}_2+\cdots+r^m{}_n = r^m \end{array}$$

である．ここで$WR_{(n)}$は，全体として求められる短縮計画であるから，上述の状態変数R_eと同様に，実行可能な方策をとらねばならないため，以下の関係，

$WR_{(n)} \in PWR_{(n)}$

$PWR_{(n)}$；n個の全レベルをとおして実行可能な総短縮状況パターンの集合

を満足していなければならないことは明らかである．

いま，この問題を

$$
\begin{aligned}
f_n(r^1, r^2, \cdots, r^m) = &\min_{\substack{r^1_1+r^1_2+\cdots+r^1_n=r^1 \\ r^2_1+r^2_2+\cdots+r^2_n=r^2 \\ \vdots \\ r^m_1+r^m_2+\cdots+r^m_n=r^m}} \{g_1(r^1_1, r^2_1, \cdots, r^m_1) \\
&+ g_2(r^1_2, r^2_2, \cdots, r^m_2) \\
&+ \cdots + g_n(r^1_n, r^2_n, \cdots, r^m_n)\}
\end{aligned}
$$

とおけば，上式の１からnまでの各レベルは，フィードバックのないシステムとして捉えることができるカットネットワークより設定されているので，ＤＰの基本原理である最適性の原理により，

$$f_1(r^1, r^2, \cdots, r^m) = g_1(r^1, r^2, \cdots, r^m)$$

$$
\begin{aligned}
f_n(r^1, r^2, \cdots, r^m) = &\min_{\substack{0 \leq r^1_n \leq r^1 \\ 0 \leq r^2_n \leq r^2 \\ \vdots \\ 0 \leq r^2_n \leq r^2}} \{g_n(r^1_n, r^2_n, \cdots, r^m_n) \\
&+ f_{n-1}(r^1 - r^1_n, r^2 - r^2_n, \cdots, r^m - r^m_n)\}
\end{aligned}
$$

のようなＤＰの繰返しの関数方程式として定式化することができる．

５．状態変数の実行可能領域に関する検討

(1)総短縮状況パターン$WR_{(n)}$の実行可能領域

ここでは，カットネットワークにおけるすべてのレベルを処理した結果である総短縮状況パターン$WR_{(n)}$の実行可能領域について検討を加える．

いま，各経路の必短縮日数を

$$(A^1, A^2, \cdots, A^k, \cdots, A^m)$$

として定義する．

このとき，任意の経路kに対していずれかの共通の作業を含む経路k_{sl}のq本の集合S^kを

$$S^k = \{k_{s1}, k_{s2}, \cdots, k_{sl}, \cdots k_{sq}\}$$

とすれば，この集合S^kは，前述したルート行列における経路kの行ベクトルの構成要素$a_{k,(i,j)}=1$となる作業(i, j)［(i, j)∈P；ここでPは短縮対象ネットワークに含まれる作業の集合］に着目した列ベクトルの経路k以外にその構成要素$a_{ksl,(i,j)}=1$となる経路k_{sl}をすべて抽出することにより求めることができる．

ここで，集合S^kに経路kを含めた各経路の必要短縮日数の最大値が経路kの必要短縮日数A^kならば，すなわち，

$$\max_{k_{sl} \in S_k} (A^k, A^{k_{s1}}, A^{k_{s2}}, \cdots, A^{k_{sl}}, \cdots, A^{k_{sq}}) = A^k$$

ならば，経路kの総短縮日数r^kのとりうる領域は，その必要短縮日数A^kと経路kに対していずれかの共通作業をもつ経路の集合S^kに含まれる経路の必要短縮日数の総和との関係によって決定される．さらに，各作業には，標準所要時間D_{ij}と特急所要時間d_{ij}が規定されていることを考慮すれば，r^kのとりうる領域は以下のようである．

i) $A^k < \min[\sum_{ij \in P} a_{k,(i,j)} \cdot (D_{ij} - d_{ij}), \sum_{l=1}^{q} \min\{A^{k_{sl}}, \sum_{i'j' \in P^{k|k_{sl}}} (D_{i'j'} - d_{i'j'})\}]$のとき，

r^kのとりうる領域は，

$$\therefore A^k \leqq r^k \leqq \min[\sum_{ij \in P} a_{k,(i,j)} \cdot (D_{ij} - d_{ij}), \sum_{l=1}^{q} \min\{A^{k_{sl}}, \sum_{i'j' \in P^{k|k_{sl}}} (D_{i'j'} - d_{i'j'})\}]$$

ii) $A^k \geqq \min[\sum_{ij \in P} a_{k,(i,j)} \cdot (D_{ij} - d_{ij}), \sum_{l=1}^{q} \min\{A^{k_{sl}}, \sum_{i'j' \in P^{k|k_{sl}}} (D_{i'j'} - d_{i'j'})\}]$のとき，

r^kのとりうる領域は，

$$\therefore r^k = A^k$$

P；短縮対象ネットワークに含まれる作業の集合

$P^{k|k_{sl}}$；経路kと経路k_{sl}の共通作業の集合
すなわち，ルート行列の構成要素において，
$a_{k,(i',j')} = 1 \quad \cap \quad a_{ksl,(i',j')} = 1$
となる作業(i', j')の集合

$a_{k,(i,j)}$；ルート行列における経路kに着目した行ベクトルの構成要素

D_{ij}；作業(i, j)の標準所要時間

d_{ij}；作業(i, j)の特急所要時間

一方，集合S^kに経路kを含めた各経路の必要短縮日数の最大値が経路k以外の経路k_{sl}の必要短縮日数$A^{k_{sl}}$であるならば，すなわち，

$$\max_{k_{sl} \in S_k} (A^k, A^{k_{s1}}, A^{k_{s2}}, \cdots, A^{k_{sl}}, \cdots, A^{k_{sp}}) = A^{k_{sl}} (> A^k)$$

ならば，r^kのとりうる領域は以下のようである．

$$A^k \leqq r^k \leqq \min\{A^{k_{sl}}, \sum_{ij \in P} a_{k,(i,j)} \cdot (D_{ij} - d_{ij})\}$$

このようにして，すべての経路における総短縮日数の実行可能領域が求められれば，それらのパターンの集合である$PWR_{(n)}$は，それら実行可能領域内

でおこないうる組合せの結果として把握することができるのである.

(2)各段での短縮状況パターンR_eの実行可能領域

ここでは，カットネットワークに設定された任意レベルeにおける短縮状況パターンR_eの実行可能領域について検討する.

いま，カットネットワークに設定された任意のレベルeでの各経路の短縮状況パターンR_eを

$$R_e = (r^1{}_e,\ r^2{}_e,\ \cdots,\ r^k{}_e,\ \cdots,\ r^m{}_e)$$

$r^k{}_e$；レベルeにおける経路kの総短縮日数
m；短縮対象ネットワークに存在する経路の総数

と前述の定式化と同様にm次元空間のベクトルを設定する．このとき，作業(i',j')をレベルeに設定されたカットcに含まれる任意の作業とすれば，この作業(i',j')は，カット行列におけるカットcに注目した行ベクトルの構成要素$b_{c,(i',j')}=1$となる作業である．そして，この作業(i',j')を通過する任意の経路k_{ve}はルート行列における作業(i',j')に着目した列ベクトルの構成要素$a_{kve,(i',j')}=1$となる経路である.

ここで，このような経路の集合$S_{(i',j')}$を

$$S_{(i',j')} = \{k_{v1},\ k_{v2},\ \cdots,\ k_{vl},\ \cdots k_{vw}\}$$

(i',j')；カットcに含まれる任意のカット
k_{vl}；作業(i',j')を通過する任意の経路
w；短縮対象ネットワークに存在する経路の総数

とすれば，作業(i',j')の短縮日数の上限値は，集合$S_{(i',j')}$に含まれる各経路の必要短縮日数の最大値もしくは作業(i',j')の短縮可能日数によって決定される．すなわち，

$$\max(A^{kv1}, A^{kv2}, \cdots, A^{kvl}, \cdots, A^{kvw}) = A^{kvl}$$

のとき，作業(i',j')の短縮日数$T_{i'j'}$の領域は，この作業(i',j')の短縮を考えない場合の0を下限値として

$$0 \leqq T_{i'j'} \leqq \min\ (A^{kvl},\ D_{i'j'} - d_{i'j'})$$

$T_{i'j'}$；作業(i',j')のカットcにおける短縮日数
$D_{i'j'}$；作業(i',j')の標準所要時間
$d_{i'j'}$；作業(i',j')の特急所要時間

である．さらに，この作業(i',j')を通過する各経路の短縮日数のカットcにおける実行可能領域が上記の$T_{i'j'}$の領域と一致するので,

$$0 \leqq r^{kvl}{}_e,\ r^{kv2}{}_e,\ \cdots,\ r^{kvl}{}_e,\ \cdots,\ r^{kvw}{}_e \leqq \min\ (A^{kvl},\ D_{i'j'} - d_{i'j'})$$

$r^{kvl}{}_e$；カットネットワークにおいてレベルeと設定されたカットcに含まれる作業(i',j')を通過する経路k_{ve}の短縮日数

のような関係として表わせる.

そして，これらすべての経路のカットcでの短縮日数は，上述より同一の作業(i',j')の短縮日数と等しくなることは明らかなので,

$$r^{kv1}{}_e = r^{kv2}{}_e = \cdots = r^{kvl}{}_e = \cdots = r^{kvw}{}_e$$

のような条件が必要となることは容易に理解できる.

このように，作業日程短縮型のスケジュール問題のための新しい計画モデル理論を構築することができたので，計算例として図-1の問題に対してこのモデル理論を適用した結果，最適な作業短縮計画案が以下のように算出された.

$$f_5(2,\ 5,\ 3,\ 4) = g_1(0,\ 0,\ 0,\ 0) + g_2(0,\ 2,\ 2,\ 1) + g_3(0,\ 1,\ 1,\ 1) + g_4(0,\ 0,\ 0,\ 0) + g_5(2,\ 2,\ 0,\ 2) = 405\ \text{(万円)}$$

各作業の短縮状況は
作業（0，2）で2日，作業（0，3）で3日
作業（3，7）で1日，作業（5，7）で3日

6．おわりに

以上のように本論文において提案した作業日程短縮型のスケジューリングモデル理論は，DPの適用を可能としているため，従来のCPM理論と比較しても，アルゴリズムが単純化されたとともに，そのアルゴリズムはコンピュータの能力を有効に発揮せしめる数値演算形態を有するものであるといえる．また，この他にも問題の解法としてDPを用いた効果としては，所要日数と所要費用の線形性を仮定する必要がなくなり，離散形，非線形の問題にも合理的かつシステマティックに対応することができるようになったことなどがあげられる．今後は，各短縮日数における最小費用をパラメトリックに表現したプロジェクト費用曲線を，CPM同様に作成するためのより一層の理論的進展が必要であると考える.

【参考文献】

1)春名，山田，滑川；グラフ理論にもとづく経路探索問題に関する理論的研究，土木学会関西支部年次学術講演概要，1994，5

2)春名，荒川，山田；ネットワークトポロジー理論にもとづく工程計画モデルに関する研究，土木学会関西支部年次学術講演概要，1993，5.