第II部門　　流れおよび水深の急変動を考慮した拡張型非定常緩勾配方程式

京都大学工学部　正会員　○間瀬　肇
(株) ニュージェック　榊原　弘
(株) ニュージェック　正会員　三島　豊秋

1．はじめに

緩勾配方程式と同精度の精度を保ち，数値計算的に扱いやすくした非定常緩勾配方程式は，屈折，浅水変形，回折，反射，砕波を同時に取り扱うことができ，平面波浪場の計算手法の中で適用範囲の広いものである．この非定常緩勾配方程式は，伊藤・谷本 (1971) による数値波動解析法と方程式系は同じであり，西村ら (1983) および渡辺ら (1984) によって広められたものである．本研究では，流れおよび緩勾配の仮定を満たさない水深の急変動の影響も考慮した，拡張型の非定常緩勾配方程式を誘導する．

2．拡張型非定常緩勾配方程式

実水深 $h'(\boldsymbol{x})$ を，平均水深 $h(\boldsymbol{x})$ とそれからの急変動 $\delta(\boldsymbol{x})$ に分け，$h'(\boldsymbol{x})=h(\boldsymbol{x})-\delta(\boldsymbol{x})$ のようにおく．波の Lagrangian は，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
L&=\int_{-h'}^{\eta} p\,dz=-\rho\int_{-h'}^{\eta}\left\{gz+\phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right\}dz\\
&=-\rho\int_{-h}^{\eta}\left\{gz+\phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right\}dz+\rho\int_{-h}^{-h+\delta}\left\{gz+\phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right\}dz \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで，p は波圧，η は水位，z は鉛直座標，ρ は流体の密度，g は重力加速度，ϕ は速度ポテンシャル，∇ は３次元勾配ベクトルである．速度ポテンシャルを

$$\phi(\boldsymbol{x},z,t)=\int \boldsymbol{U}\cdot d\boldsymbol{x}+f(z)\,\tilde{\phi}(\boldsymbol{x},t) \qquad (2) \qquad\qquad f(z)=\cosh k(h+z)\big/\cosh kh \qquad (3)$$

と表し，式 (1) に代入して右辺第１項の積分を求めると，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
L_1=-\rho\Big[&\frac{1}{2}g\eta^2+\tilde{\phi}_t\eta f|_{z=0}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla_h\tilde{\phi}\,\eta f|_{z=0}+\frac{1}{2}\tilde{\phi}^2 I\langle(\nabla_h f)^2\rangle\\
&+\frac{1}{2}(\nabla_h\tilde{\phi})^2 I\langle f^2\rangle+\frac{1}{2}\tilde{\phi}^2 I\langle f_z{}^2\rangle+\tilde{\phi}\,\nabla_h\tilde{\phi}\cdot I\langle\nabla_h f f\rangle\Big] \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ただし，$I\langle\bullet\rangle$ は $\bullet$ についての鉛直積分である．また，式 (1) の右辺第２項の積分は次のとおりである．

$$L_2=\rho\left[\frac{1}{2}\tilde{\phi}^2\delta(\nabla_h f)^2\Big|_{z=-h}+\frac{1}{2}(\nabla_h\tilde{\phi})^2\delta f^2\Big|_{z=-h}+\frac{1}{2}\tilde{\phi}^2\delta f_z{}^2\Big|_{z=-h}+\tilde{\phi}\,\nabla_h\tilde{\phi}\cdot(\delta\nabla_h f f)|_{z=-h}\right] \qquad (5)$$

従って，Lagrangian は $L=L_1+L_2$ である．これを η で変分すると

$$\tilde{\phi}_t+\boldsymbol{U}\cdot\nabla_h\tilde{\phi}+g\eta=0 \qquad (6)$$

が得られ，$\tilde{\phi}$ で変分をとれば次式が得られる．

Hajime MASE, Hiroshi SAKAKIBARA, Toyoaki MISHIMA

$$\eta_t + \boldsymbol{U}\cdot\nabla_h\eta + (\nabla_h\cdot\boldsymbol{U})\,\eta + \nabla_h\cdot\left\{I\langle f^2\rangle\,\nabla_h\tilde{\phi}\right\} - I\langle f_z{}^2\rangle\,\tilde{\phi} - \frac{1}{\cosh^2 kh}\nabla_h\cdot\left(\delta\nabla_h\tilde{\phi}\right) = 0 \qquad (7)$$

が得られる．分散関係式は次のとおりである．

$$\sigma^2 = gk\tanh kh \qquad (8) \qquad\qquad \sigma = \omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U} \qquad (9)$$

ここで，k は波数ベクトルの絶対値である．ここで

$$I\langle f^2\rangle = CC_g/g \qquad (10) \qquad\qquad I\langle f_z{}^2\rangle = \left(\sigma^2 - k^2 CC_g\right)/g \qquad (11)$$

の関係式を用いて，式 (7) および式 (6) を整理すると以下のようになる．

$$\frac{D\eta}{Dt} + (\nabla_h\cdot\boldsymbol{U})\,\eta + \nabla_h\cdot\left\{\left(CC_g/g\right)\nabla_h\tilde{\phi}\right\} - \left\{\left(\sigma^2 - k^2CC_g\right)/g\right\}\tilde{\phi} - \frac{1}{\cosh^2 kh}\nabla_h\cdot\left(\delta\nabla_h\tilde{\phi}\right) = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{D\tilde{\phi}}{Dt} + g\eta = 0 \qquad (13) \qquad\qquad ここで，\quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla_h \qquad (14)$$

式 (12) および式 (13) から η を消去すると

$$\frac{D^2\tilde{\phi}}{Dt^2} + (\nabla_h\cdot\boldsymbol{U})\,\frac{D\tilde{\phi}}{Dt} - \nabla_h\cdot\left(CC_g\,\nabla_h\tilde{\phi}\right) + \left(\sigma^2 - k^2CC_g\right)\tilde{\phi} + \frac{g}{\cosh^2 kh}\nabla_h\cdot\left(\delta\nabla_h\tilde{\phi}\right) = 0 \qquad (15)$$

式 (15) で左辺第５項がなければ Kirby (1984) と同じ結果である．

平面波の関係式

$$\eta = a\,e^{i\,(kx-\sigma t)} \qquad (16) \qquad\qquad \phi = -i\,\frac{ga}{\sigma}\,e^{i\,(kx-\sigma t)} = g\eta_t/\sigma^2 \qquad (17)$$

を用いて式 (12) の第５項の $\tilde{\phi}$ を η で書き直して整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\eta}{\partial t} + \left(C/C_g\right)\left(U\frac{\partial\eta}{\partial x} + V\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \left(C/C_g\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\eta \\ &\quad + \left(C/C_g\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{CC_g}{g}u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{CC_g}{g}v\right)\right\} - \frac{1}{\cosh^2 kh}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta v)\right\} = 0 \qquad (18)\end{aligned}$$

式 (15) に作用素 ∇_h をかけて整理すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uu + Vv) + g\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \qquad (19) \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(Uu + Vv) + g\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \qquad (20)$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{u} = (u, v)$ は波の速度，$\boldsymbol{U} = (U, V)$ は流れの速度である．

式 (18)，(19)，(20) が，流れおよび水深の急変動を考慮した拡張型非定常緩勾配方程式である．数値計算については現在進行中である．また，経験的にこの式に非線形項および分散項をつけ加えることにより，非線形性を考慮した不規則波浪に対する基礎式系を構築することができるが，これは今後の課題とする．

３．参考文献（英文のみ）

Kirby, J.T. (1984): A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, JGR, Vol.89, No.C1, pp.745-747.