第Ⅱ部門　　　　自由水面計算法の比較

神戸大学工学部　正会員　中山　昭彦
神戸大学工学部　学生員○福知　正高

1．はじめに

我々の身近に存在している流れ現象に、自由水面を持つものは多く、その現象を解明することは非常に意義がある。しかし、自由水面を持つ流れ問題は、通常の流れ問題と、支配方程式である偏微分方程式を解かねばならない領域、すなわち解析対象領域の中に時事刻々と複雑に形状を変化させる未知境界としての自由水面が含まれるという点で大きく違い、そのため自由水面の解析は非常に難しくなっている。従って、数値計算手法（差分法、有限要素法、境界要素法等）と自由水面取り扱い手法とで構成できる、近似解析手法を用いて、自由水面の解析を行う。その自由水面取り扱い手法として、自由水面を間接的に表現する、高さ関数法[1),VOF法、密度関数法などが提案されている。

本研究は、数値計算法として差分法、自由水面取り扱い手法として高さ関数法を用いた近似解析手法で自由水面の計算を行い、その計算結果と自由水面取り扱い手法としてVOF法を用いた計算結果とを比較し、どのような差があるかを検討した。

2．計算法

流れ場を、２次元においてxを水平方向、yを鉛直方向とする座標系で考える。数値計算は、次に示す流れの支配方程式である連続の式と２次元非定常流のナビエ・ストークス方程式を速度場と圧力場に分解して時間発展で解くMAC法に準じ行う。

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (v^2)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)-g \tag{3}$$

ここで、鉛直軸方向には重力加速度gが働いているとした。ただ、自由水面を持つ流れの計算は、それらの式に自由水面における条件を加えなければならない。今回は、自由水面取り扱い手法として、比較的計算アルゴリズムが単純で、境界条件の設定がしやすい高さ関数法を用いて、２次元の自由水面の計算を行うので、高さ関数法による自由水面における条件を加える。

高さ関数法では、２次元で、自由水面の位置を水平座標xの関数hだけと考える。そこで、粘性応力と表面張力を無視すると、自由水面における条件、つまり運動学的条件と動力学的条件は次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=v \tag{4}$$

$$P_h=P_0 \tag{5}$$

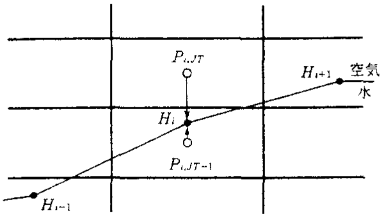

図-1

Akihiko NAKAYAMA, Masataka FUKUCHI

ここで、P_hはy=hにおける圧力で、P_0は大気圧である。そこで、図-1のような直行格子においてhを離散化する。その離散化値H_iはi番目の格子の中心での自由水面高さを表す。図-1で、自由水面高さH_iが$P_{i,JT-1}$と$P_{i,JT}$をm:1-mで内分するものと仮定すると、(2)の条件を満たすためには、境界条件として$P_{i,JT}$の値を次のようにする必要がある。

$$P_{i,JT}=\frac{P_0-(1-m)P_{i,JT-1}}{m} \tag{6}$$

自由水面を持たない流れのMAC法の計算過程に、(4)と(6)の条件を組み入れた。(6)式は、ポアソン方程式を反復解法で解く時の境界条件として与え、新しい速度場が求まった後に(4)式を時間積分した。

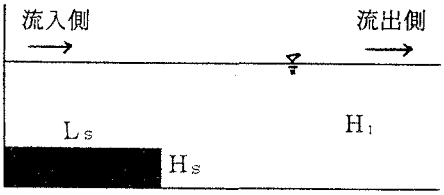

図-2 計算例

3. 計算例

次に計算例としては、図-2のようなステップ高さH_S=2、ステップ長さL_S=7を持つ後方ステップがある場合を考えた。初期条件としては、水深H_1=4.5、水面下を静水圧、流入面以外の速度は0とした。流入面のみ、常に一様な、x方向の速度U=0.1を与えた。

4. 計算結果と考察

高さ関数法による計算結果を図-3,図-4に示す。この計算では、静止した状態の水に突然、流入面において流入速度u=0.1を与えることになるので、流入面付近の圧力は急激に上がり、そのためその付近の流体粒子は圧力の高い方から低い方、つまり水面の方向に向かって急速に分散しようとする。また、ある時間が経過すると先程の流入面付近の流体粒子が分散し、逆に流入面付近に流れ込もうとする流体粒子がでてくる。図-3,図-4からそのことが見られ、理論値にあった計算結果が得られたと思われる。そこで、過去に求められたVOF法による計算結果、図-5,図-6と比較してみた。VOF法の方は、流入面の水深を一定にしていないので、厳密な比較はできないが、初期においては類似していることがわかる。今後、厳密な比較を行っていくと同時に、実験による結果とも比較していく必要がある。

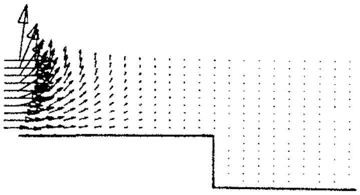

図-3 高さ関数法による計算結果(t=0.01)

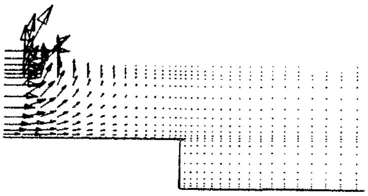

図-5 VOF法による計算結果(t=0.01)

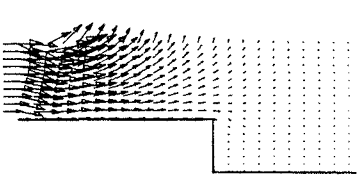

図-4 高さ関数法による計算結果(t=0.1)

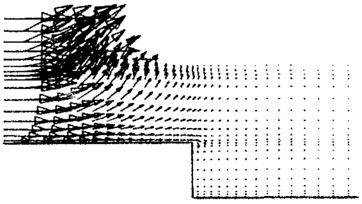

図-6 VOF法による計算結果(t=0.1)

参考文献

1)Hirt, C.W. and Nichols, B.D.:Volume of fluid(VOF) method for the dynamics of free boundaries, J. Computational Physics, Vol39, 202-203, 1981.