

大阪市立大学大学院(前期博士課程) 学生員 ○米田 幸司

大阪市立大学工学部

正 員 小林 治俊

大阪市立大学工学部

正 員 園田恵一郎

1. まえがき 近年、複合材料の分野が大いに発展し、その材料特性に応じて種々な工学的目的に使用されている。これらの材料は巨視的に異方性体と見なせる。そこで本研究では、横等方性材料から成る平面ひずみ状態の平板を対象とした衝撃応答解析を行い、材料定数の違いが応答に及ぼす影響を検討する。解析法としてはラプラス変換の不要な固有関数展開法[1]を用いる。

2. 解析方法 xy 面を等方面とし、 z 軸を異方軸とする(図-1 参照)。平面ひずみ状態での応力-変位関係は C_{ij} を材料定数として次式となる[2]。

$$\sigma_x = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_z = C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1)$$

運動方程式は、 ρ を密度、 t を時間として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

板は両端で単純支持とすれば、境界条件は、 q を荷重として、

$$w = \sigma_x = 0 \quad (x=0, \ell) \quad (3)$$

$$\sigma_z = -q(x, t), \quad \tau_{xz} = 0 \quad (z=-h/2), \quad \sigma_z = \tau_{xz} = 0 \quad (z=h/2) \quad (4)$$

となる。固有関数展開法によれば、単純支持条件を満足する式(2)の解は次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} u^*(z, t) \cos(\alpha_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) U_{mn}(z) \cos(\alpha_n x) \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} w^*(z, t) \sin(\alpha_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) W_{mn}(z) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = n\pi/\ell \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 (u^*, w^*) は荷重 q による準静的解の z 成分、 (U_{mn}, W_{mn}) は固有関数(振動モード関数)の z 成分である。(5)式を(2)式に代入し、固有関数の直交性などを利用すれば、未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ に関する次の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) = -\ddot{Z}_{mn}, \quad Z_{mn} = \frac{-1}{N_{mn}^2} \int_0^{\ell} \int_{-h/2}^{h/2} (u^* U_{mn} + w^* W_{mn}) dx dz \quad (6)$$

ただし、 N_{mn} は固有関数のノルムであり、ドットは時間微分を意味する。この解は周知の Duhamel 積分形で求められ、初期条件(静止条件)を設定すれば応答解が確定する。

3. 数値計算例 本研究において、ポアソン比は等方面： (x, y) 面，異方面： $(y, z), (z, x)$ 面ともに $\nu = \nu' = 0.3$ とし、等方面と異方面のヤング率比は、 $E/E' = 1, 2, 3$ としている。板厚比は $h/\ell = 0.2$ ，衝撃荷重は荷重幅 $c/\ell = 0.2$ の部分等分布荷重で、時間に関してステップ状に作用するものとする。時間に関しては、ラメの定数 λ ， G を用いた等方性体の縦波の速度 $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$ を基準に採り、無次元時間 $\tau = c_1 t/h$ を用いる。図-2 は板中央点における σ_z の応答曲線であり、応答曲線が不連続的に変動している箇所は、

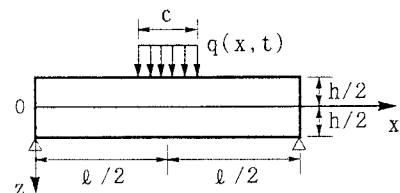


図-1 横等方性板の座標系

載荷中央点、載荷端部で発生した応力波の波面やそれに続く板の上下面で発生した反射波の波面が到達した
 応答を示している。載荷中央点からの縦波の到達とともに応答が始まり、その後下面中央からの反射波の到
 達により引張り応力が生じている。また荷重強度を越える大きな圧縮応力が生じており、ヤング率比が大き
 いほどその値も大きい。図-3は上下面中央における σ_x の応答曲線であり、ヤング率比が大きいくほど周期
 は長くなるが、最大応答値はそれほど変わらない。図-4は $z=0$ 断面での τ_{xz} の応答曲線であり、支持辺
 ($x/\ell=0$)に近いほど大きな応答値を示している。図-5は板中央点における変位 w の応答曲線であり、ヤ
 ング率比が大きいくほど等方向の剛性が高くなるので変位が小さくなっている。

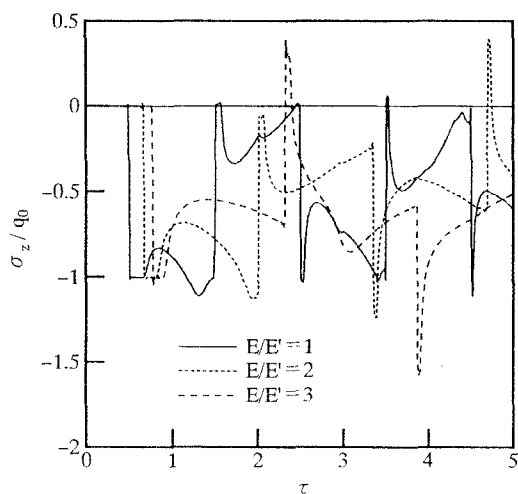


図-2 σ_z の応答曲線($x/\ell=0.5, z/h=0$)

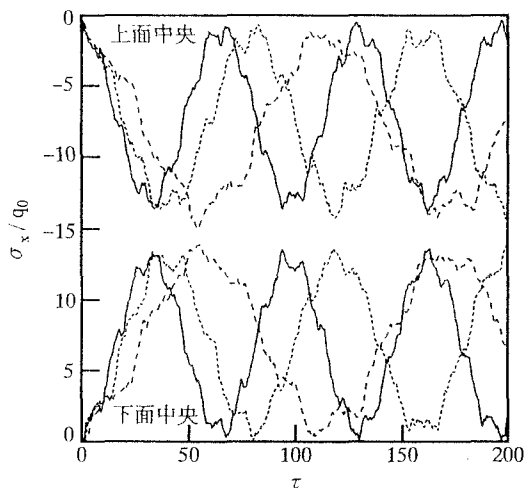


図-3 σ_x の応答曲線($x/\ell=0.5, z/h=\pm 0.5$)

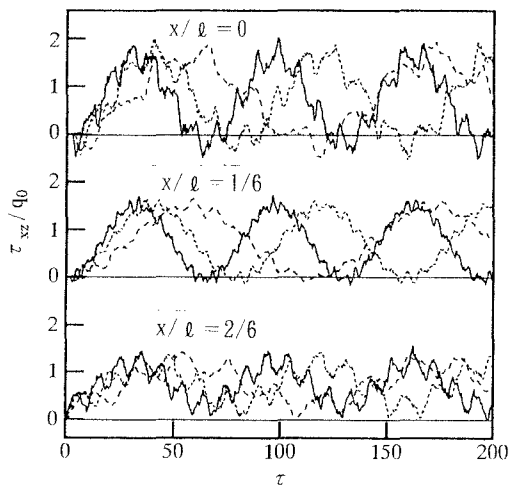


図-4 τ_{xz} の応答曲線($z/h=0$)

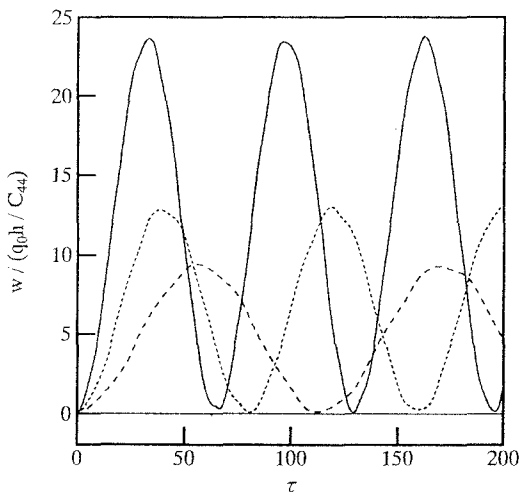


図-5 w の応答曲線($x/\ell=0.5, z/h=0$)

4. 参考文献 [1] 小林・米田・石丸・園田：異方性円板の弾性衝撃応答解析，構造工学論文集，Vol.42A，
 1996.3. [2] Lekhnitskii, S. G. : Theory of Elasticity of An Anisotropic Elastic Body, Holden-Day,
 San Francisco, 1963.