第IV部門　ネットワークトポロジー理論とD．P．を用いた
ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題の最適解法の開発研究

立命館大学　正員　春名　攻
日本建設ｺﾝｻﾙﾀﾝﾄ(株)　正員　○山田幸一郎

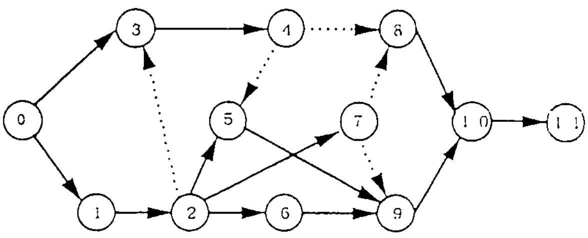
1　はじめに

本研究においては，工事用資源の量的制約のもとでのスケジューリング問題の１つであるＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題の最適解法の開発の問題をとりあげた．ここでは，我々がこれまでに基礎的研究として開発してきた方法，つまり，ネットワークにおける作業間の順序関係をより操作性の高いものとして取り扱っていくために，順序関係に関するネットワークの持つトポロジー的な性質を利用した数理計画モデルを定式化して新しい最適解法を開発した．この最適解法は，無駄な作業の組み合わせを無くすことにより，過去において開発された最適解法よりも合理的・効率的な解法となるように工夫した．また，その解法の特性から，最適性の原理で知られる動的計画法とブランチ・バウンド法を適用し，その組み合わせ数の増加を抑えることとした．

2　ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題に関する考察

まず，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題の定義を述べる．すなわち，その定義は，「工程上の全ての作業を終了するまでに要する日数が最小となる工程計画の作成を目的とする．ただし，工程上の任意の作業は同時に複種類の資源を複数量必要とする．また，各種類の資源には同時に使用できる数量には制限が与えられている．なお，任意の作業は中断できないものとするとともに，作業は所要日数を短縮したり延伸することはできない．」として，その解法に対する研究を進めた．なお，この問題への入力情報は，図-1の例題に示すように，作業の所要日数，必要資源数，および各種資源の制約数である．

従来から，このＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題に対しては，近似解を求める方法(資源山崩し法等)のみが開発されており，最適解法はいまだ開発されていない．



対象工程ネットワーク

作業の所要日数，必要資源数

作業	結合点		所要	必要資源数		
	i	j	日数	I	II	III
1	0	1	10	5	2	3
2	0	3	14	4	3	4
3	1	2	3	6	2	4
ﾀﾞﾐｰ-1	2	3	0	0	0	0
4	2	5	5	2	0	2
5	2	6	2	4	2	2
6	2	7	8	3	3	3
7	3	4	8	4	4	3
ﾀﾞﾐｰ-2	4	5	0	0	0	0
ﾀﾞﾐｰ-3	4	8	0	0	0	0
8	5	9	4	7	3	5
9	6	9	6	4	2	0
ﾀﾞﾐｰ-4	7	8	0	0	0	0
ﾀﾞﾐｰ-5	7	9	0	0	0	0
10	8	10	2	4	4	2
11	9	10	3	4	2	2
12	10	11	2	3	4	5

資源制約数

職種	I	II	III
制限量	10	6	8

図-1　例題ネットワークとその入力情報

また，別の視点から資源の運用問題をとりあげて最適解を求めていくアプローチが，探索型解法のブランチ・バウンド法を適用した解法として開発されている．しかし，この方法は膨大な計算量になるため，いまだ実用化の段階に入っていない．

このような状況に対し，本研究では新しい方向よ

Mamoru HARUNA, Koichiro YAMADA

り前者の最適問題の最適解法の開発を行なったものである．

3　最適解法に関する検討

3．1　問題の定式化に関する検討

工程にN個の作業が含まれる場合には，N個の作業の開始時刻およびN個の作業の終了時刻が存在することより，作業の実施状態をあらわすのにN×Nの行列(g_{ij}；以下，実施状況マトリックスと呼ぶ)によって表現することができる(図-2)．ここで，実施状況マトリックスのｊ方向は時間区間のユニットを，ｉ方向は作業番号を表している．そして，g_{ij}を次のように定義する．

$$g_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i=1,\cdots,N, j=1,\cdots,N)$$

また，その値は次のように与えることとする．

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{；区間 } j \text{ において作業 } i \text{ を実施しない，} \\ 1 \text{；区間 } j \text{ において作業 } i \text{ を実施する，} \end{cases}$$

さらに，g_{ij}のｊ区間の時間ユニットの長さ(日)を，

$$x_j, \quad (j=1,\cdots,N),$$

と表すこととする．このように定義すると，工期λの最小化は以下のように表すことができる．

$$\text{minimize}\ \lambda = \sum_{j=1}^{N} x_j$$

また，最小工期を求めるにあたって，必要となる制約条件は次のように定式化される．

まず，１つ目の制約条件は，作業ｉの所要日数をd_iとすると，

$$\sum_{j=1}^{N} g_{ij} \cdot x_j = d_i, \quad (i=1,2,\cdots,N),$$

のようにあらわされる．つぎに，２つ目の制約条件は，常に工程が資源制約数(資源の種類の数＝Ｋ)以内で行なわれるための制約条件式であり，以下のようにあらわされる．

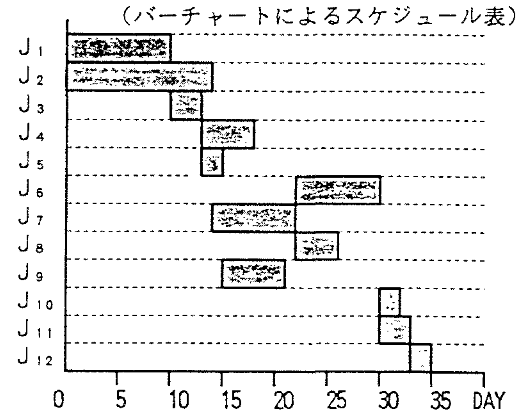
$$\sum_{i=1}^{N} g_{ij} \cdot r^k_i \leq R^k, \quad (k=1,\cdots,K, j=1,2,\cdots,N),$$

r^k_i；作業j_iが必要としている種類ｋの資源数，
R^k；種類ｋの資源制約数．

また，３つ目の制約条件は，同時間帯に実施されている作業は全て同時作業が可能なことが保持されていなければならない．いま作業J_iと同時作業が可能な作業群をP_iとすると，

$$J_i \in P_i, \quad (i=1,2,\cdots,N),$$

でなければならないことである．



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	1	1	1									
3		1										
4			1	1	1							
5			1	1								
6								1	1			
7				1	1	1	1					
8								1				
9					1	1						
10										1		
11										1	1	
12												1
	10	3	1	1	3	3	1	4	4	2	1	2

図-2　作業の実施状況のマトリックス化

3．2　最適解法に関する検討

以上の定式化をみると明らかなように，複雑な組み合わせ問題となっており，直接解くことは困難である．このため，本研究においては作業の施工順序に着目し，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題にアプローチすることとした．この作業の施工順序を設定するために，本研究において開発してきたネットワークトポロジー理論による方法を適用することとし

た．

ネットワークトポロジー理論を適用すると，同時に実施することが可能な作業の集合は，カットに含まれる作業の集合として取り扱うことができる．そして，対象ネットワークの作業間の順序関係をトポロジカルにカット間の順序関係として写像したものがカットネットワークとして求められる(図-3参照，なお，詳細な説明およびアルゴリズムは省略)．

なおここでいうカットの定義は，

①任意のカットは工程を２分する．

②任意のカットに含まれる作業間には管理的順序関係のみが存在する．

という性格を持っている．このため，カットネットワークのルートの性質を整理すると次のように表される．

①始終点間の任意の１つのルートは全作業を含んでいる．

②任意のルートは対象ネットワークの順序関係を保持しており，対象ネットワークの作業の順序関係を矛盾なくトポロジカルに写像している．

ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題の最適解を効率的に求めるために，ここでは，作業間順序関係に矛盾なく配分順序を設定するための方法として，作業の順序関係がトポロジカルに写像されているカットネットワークのルートを用いることとした．配分順序は，このルートに沿いながら作業の実施順序の組み合わせを探索していくことにより決定することとした．

なお，本研究においては配分順序を抽出するにあたり，カットが移動する際に生じる状態が次のように分けられることを利用することとした．すなわち，作業の種類が，

①作業の種類を移動元以前のカットのみに含まれる作業群

②移動先・移動元のカットに含まれる作業が共通である作業群

③移動先のカットのみに含まれる作業群

というように分けることができることを利用することとしたのである．この作業の識別を用いて，カットネットワークのルートに沿いながら作業の順序組み合わせを行ない配分順序を決定することとした．(ここでは詳細なアルゴリズムは紙面の都合より割愛する)

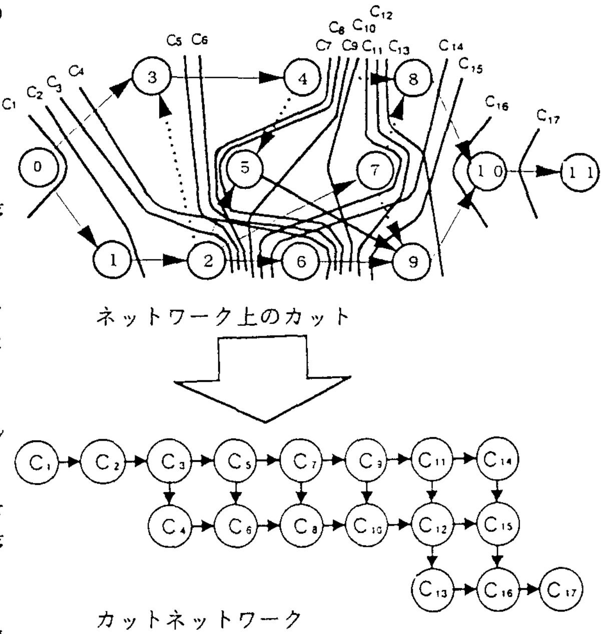


図-3　対象ネットワークのカットネットワーク

3．3　D．P．を用いた配分順序設定

最適配分順序を決定するために，カットネットワークの全ルートに対して同様な処理を行なうことは計算量も非常に膨大になる．また，無駄な計算を多量に行なわねばならないことになり，このままの方法では非効率的なものとなる．そこで，配分順序をより効率的に決定するための検討を行なった．

まず，カットの移動ごとに設定する配分順序は，それ以前のカットの移動から求めた配分順序を利用した上で決定されるものである．このことは，D．P．(動的計画法)の最適性の原理の適用ができることを示している．配分順序の決定は，ｎ段階(カットが移動するときの段階)の決定は，ｎ－１段階(そのカットが移動する前の段階)の決定に依存しているが，このことは配分順序決定に際して生じる膨大な計算量を大幅に削減することができる．ここで，配分順序決定のための関数方程式を次のように定式化した．

$$f_1(y)=g_1(y),$$
$$f_n(y)=\min\{g_n(y_n)+f_{n-1}(y-y_n)\},$$

$f_n(y)$ ；n段階における作業の配分順序,
$g_n(y_n)$；n段階において組み合わされる配分順序,
y ；n段階までにカットに含まれてきた作業,
y_n ；n段階において組み合わされる作業.

3．4　実施状況マトリックスへの作業の配分

以上のように作業の配分順序が決定できると，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題は非常に簡潔な問題として展開することができる．作業の中断できない条件を考慮すると，問題を資源山積み方法と同様に，つまり，作業の山積みというような処理方法により問題を解決することができるのである．つまり，この配分順序に従って作業を実施状況マトリックスに配分していくのである．この際に作業の配分する区間は，その作業を実施状況マトリックスに配分したときに，上記の３つの制約条件式を満足した上で最早で作業を開始することのできる区間である．そして，作業を配分していく過程では，最小工期を目的関数としてブランチ・バウンド法を適用し無駄な計算を排除することにした．

例題モデルに対して，この方法を適用して最適解を求めたところ，図-4に示す最小工期３５日の最適工程計画案が得られた．

4　おわりに

本研究において開発した解法が数量的にどのくらい効率的なものであるのかを説明することは困難であるが，組み合わせの数の多さに比べて，計算量をかなり削減することができた．また，Ｄ．Ｐ．適用により，従来の探索型の手法よりも，大幅に組み合わせ数を削減させることができた．なお，例題モデルに対する計算過程における配分順序の数は，47900161個となり，何も制約を設けない場合の1307674368000個の数に比べて大幅に計算量を削減できた．

今後は，さらなる計算量削減に対する検討を行なうことは勿論のこと，資源量ミニマムやＣＰＭの概念を取り入れた費用ミニマムの目的関数の条件下における解法などに取り組んでいく必要があると考える．

【参考資料】

1)春名　攻：建設工事における施工管理に関するシステム論的研究，京都大学学位論文，1971，９．
2)山田幸一郎：建設プロジェクトプランニングにおける最適スケジューリング理論の開発研究，立命館大学修士論文，1995，2．
3)春名　攻，山田幸一郎，滑川　達：ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題の最適解法に関する開発研究，第１２回建設マネジメント問題に関する研究発表・討論会論文集，1994，12．

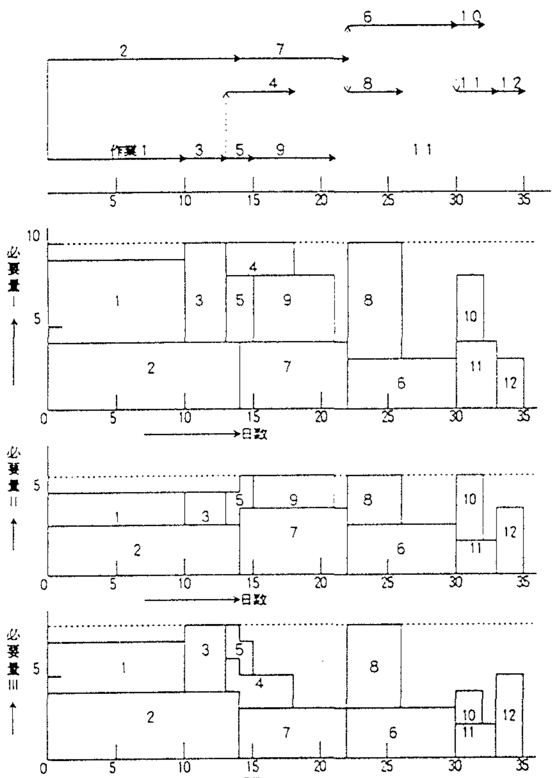


図-4　最適工程計画案