第Ⅲ部門　　有限要素特性におよぼすコッセラ連続体におけるスケールパラメータの影響に関する研究

大阪大学工学部　正員　○小田　和広
大阪大学工学部　正員　　松井　保

1．まえがき

ひずみ軟化挙動を示す材料に対し有限要素解析を行う場合，数値解析解はメッシュ分割の影響を受けるため，解が唯一に決定されない。これは，局所理論に基づく構成式では，ひずみ軟化により局所化する領域の大きさを的確に評価できないためである[1]。この問題を解決するための一つの方法は，非局所理論を用いることである。コッセラ連続体とは、非局所理論の一つであり，通常の連続体理論の枠組みに角運動による回転の効果を考慮できるよう拡張した連続体理論，すなわちマイクロポーラ理論の１つである[1]。本理論の代表的な特徴の一つとして，長さの次元を持つスケールパラーメータを材料定数として持つことが挙げられる。そこで，本研究では数値解析に用いる有限要素の固有値と固有モードにおよぼすスケールパラメータの影響について検討を行ってみた。

2．コッセラ連続体

コッセラ連続体とは、材料の構成要素自身が材料全体の変形などと無関係に変形や剛体回転しうる連続体理論である[2]。平面ひずみ問題を対象とする場合、考慮すべき自由度は、平面内の２つの変位成分(u_x,u_y)および平面に直行する軸(z軸)を回転軸とする回転成分(ω_z)である。したがって、１節点当たりの自由度は合計３つとなる。

図-1はコッセラ連続体における応力と偶応力の関係を示している。偶応力が作用しているため、せん断応力は共役の関係にならない。弾性状態における応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\sigma_{kl} = \lambda\varepsilon_{rr}\delta_{kl} + (\mu+\mu_c)\varepsilon_{kl} + (\mu-\mu_c)\varepsilon_{lk} \quad \text{および} \quad m_{kl}/\ell = 2\mu\kappa_{kl}\ell \tag{1}$$

ここで、λおよびκはラーメの定数である。μ_cおよびℓはコッセラ連続体理論において新たに導入される材料定数である。特にℓはスケールパラメータと呼ばれ、長さの次元を持つパラメータである。また，ひずみは以下のように定義される[3]。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y},\quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z,\quad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \omega_z,\quad \kappa_{xz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \text{ および } \kappa_{yz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \tag{2}$$

直ひずみの定義式は通常の連続体理論におけるものと等しいが、せん断ひずみの定義式にはω_zの項が付加されている。このため、せん断ひずみは対称にならない。

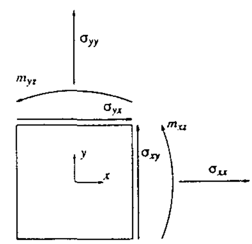
以下では，von Misesタイプの降伏関数を持ち，normality ruleに従うとして解析を行っている[3]。

$$f = \left\{3\left(\frac{1}{4}s_{ij}s_{ij} + \frac{1}{4}s_{ij}s_{ji} + \frac{1}{2}m_{ij}m_{ij}/l^2\right)\right\}^{1/2} - \bar{\sigma} \tag{3}$$

ここで，s_{ij}は偏差応力テンソルを示している。

3．数値解析

今回解析に用いた有限要素は，１次の四辺形アイソパラメトリック要素であり，剛性行列は４点積分によって計算されている。要素の１辺の長さは10cmであり，形状は正方形である。表－１は解析パラメータを，表－２は解析ケースをそれぞれ示している。ケース１は純粋せん断状態，ケース２は単純せん断状態およびケース３はモーメントによるせん断状態に対応している。また，それぞれのケースにおいてスケールパラメータは，1.0×10^{-4}から$1.0\times10^{+4}$cmまで変化させた。図-2は各ケースにおいて，スケールパラメータの変化にともない固有



図－1　コッセラ連続体における応力と偶応力

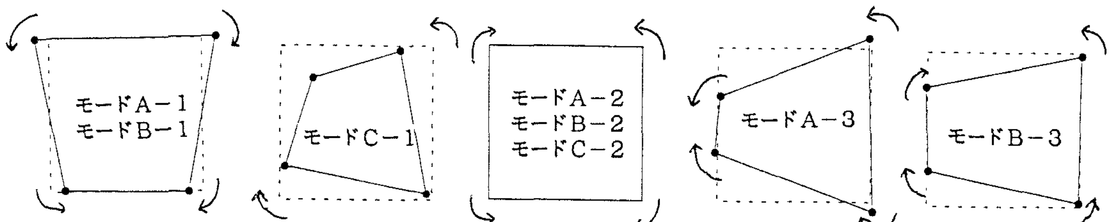
Kazuhiro Oda, Tamotsu Matsui

表－1　解析パラメータ

弾性係数(kgf/cm²)	ポアソン比	コッセラせん断係数(kgf/cm²)
100.0	0.499	50.0

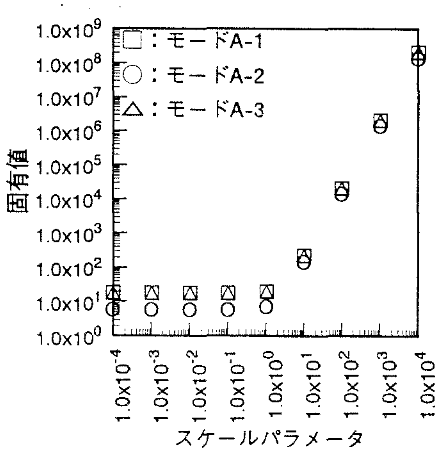
表－2　解析ケース

ケース1	$\sigma_{xx}=-\sigma_{yy}=1.0$(kgf/cm²)
ケース2	$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=1.0$(kgf/cm²)
ケース3	$m_{xz}/l=-m_{yz}/l=1.0$(kgf/cm²)

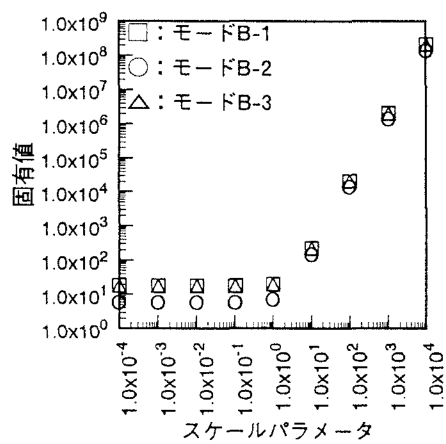


図－2　変形モード

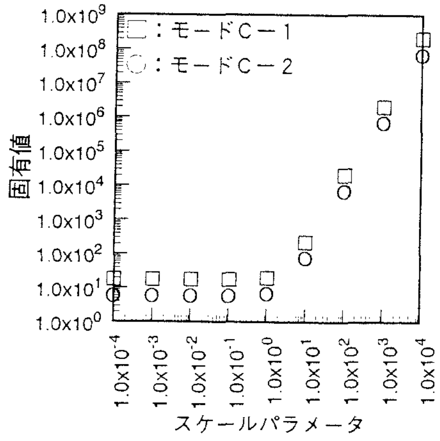
値が変化をしたモードにおける変形モードを示している。図に示すモードは，いずれのモードも回転成分が存在しており，回転成分が存在しないモードについては固有値の変化がなかった。図-3~5はスケールパラメータと固有値の関係を示している。いずれの固有モードにおいてもスケールパラメータが10.0cmに達した付近から固有値が急激に増加している。このことは，これらのモードが変形しにくくなったことを示している。このことから，コッセラ連続体を適用した有限要素解析では，要素の辺長に対しそれと同等かそれ以上のスケールパラメータを用いる際に非局所化の効果が発揮されることが示唆された。なお，本研究は科学研究費補助金　奨励研究A（課題番号：06855058）によって行われた。



図－3　固有値とスケールパラメータの関係（ケース1）



図－4　固有値とスケールパラメータの関係（ケース2）



図－5　固有値とスケールパラメータの関係（ケース3）

参考文献： 1)土質工学会「地盤の破壊とひずみの局所化に関する研究委員会」（編著），1994:地盤の破壊とひずみの局所化.2)大南正瑛（編著）,1980:マイクロメカニックス入門.
3) de Borst, R. & L. J. Sluys , 1991:L ocal isation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions, Com. Meth. App. Mech. Eng. 90, pp.805-827