

大阪府

北野 利一

京都大学大学院 学生員○中西 隆

京都大学工学部 正 員 間瀬 肇

1. はじめに 狭帯域スペクトル波のゼロアップクロス法で定義される波高の確率分布は、およそ Rayleigh分布であろうことが数々の観測結果により確認されている。そもそも、Rayleigh分布は線形不規則波の包絡線の関数値の確率分布であり、Longuet-Higgins(1952)により、ゼロバンドスペクトルという厳密な狭帯域スペクトルを持つ線形不規則波の波高分布に適用された。従って、いわゆる普通の狭帯域スペクトルを持つ線形不規則波の波高分布はいまだに導かれてはいない。そこで、木村・太田(1993)は、1) 峰の頂点は包絡線を通らないこと、2) 峰の頂点の時刻の包絡線の値は包絡線の時系列を不等間隔にサンプリングしたものであるため、その確率分布がRayleigh分布であることは明らかではないこと、を指摘した。そこで、数値シミュレーションで包絡線と峰の差の確率分布および峰の時刻での包絡線の値の確率分布を求め、それらに基づいてできる限り正確な波高分布を求めた。ここでは、数値シミュレーションで得られた包絡線と峰の差の確率分布を数学的に導き、それに基づいて峰高分布を導く。

2. 準備 水位変動の関数を Fourier級数表示し、それを変形して、

$$\eta(t) = \sum c_n \cos(\sigma_n t - \varepsilon_n) = I_c(t) \cos \sigma_m t - I_s(t) \sin \sigma_m t = A(t) \cos(\sigma_m t - \phi(t))$$

$$\left\{ I_c(t) := \sum c_n \cos((\sigma_n - \sigma_m)t - \varepsilon_n), \quad I_s(t) := \sum c_n \sin((\sigma_n - \sigma_m)t - \varepsilon_n) \right\} \quad (1)$$

と表される時、 I_c, I_s を確率変数に選んで、中心極限定理により、2変数Gauss分布を得るが、この時、変数変換 $I_c = A \cos \phi, I_s = A \sin \phi$ を行い、不要な変数 ϕ で積分することにより、Rayleigh分布

$$p(A) dA = A \exp\{-A^2/(2m_0)\} dA / m_0 \quad (2)$$

が得られる。ただし、 m_0 はスペクトルの最低次のモーメントである。これにより、確かに包絡線の関数値の確率分布がRayleigh分布であることがわかる。次に、水位変動の関数と包絡線の関数が接する時刻の包絡線の関数の絶対値を、新たに "amplitude" と名づける。もちろん、包絡線の関数は正負共にあるので "crest-amplitude" および "trough-amplitude" が存在する。この時、i) 時間変数 $t \in (-\infty, \infty)$ に対する水位変動の関数 η が与えられた時、"amplitude" の確率分布がRayleigh分布であること、ii) 一般に、峰は "crest-amplitude" の近傍に存在し、そうでない場合の確率は、狭帯域スペクトル波の場合、小さいこと、が示される（北野(1995)を参照）。ここで、スペクトルの狭帯の程度を表すために、パラメータ ν を用いる。

$$\nu = \sqrt{m_2 m_0} / m_1^2 - 1 \quad (3)$$

また、後で用いる準備として、確率変数 I_c, I_s, I'_c, I'_s の確率分布は、

$$p(I_c, I_s, I'_c, I'_s) = \exp\left\{-\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m_0} - \frac{(I'_c)^2 + (I'_s)^2}{2\nu^2 \sigma_m^2 m_0}\right\} / \left\{(2\pi)^2 \nu^2 \sigma_m^2 m_0^2\right\} \quad (4)$$

である（Longuet-Higgins(1975)を参照）。

3. 包絡線と峰の差の確率分布 "amplitude" となる時刻を t_{amp} と記し、水位変動の関数を "amplitude" の近傍でTaylor展開して、峰(谷)となる時刻 t_a を求めると、

$$t_{rest} = t_{amp} + \left\{ I_c(t_{amp}) I'_c(t_{amp}) + I_s(t_{amp}) I'_s(t_{amp}) \right\} / \left\{ \sigma_m^2 \left(I_c^2(t_{amp}) + I_s^2(t_{amp}) \right) \right\} + o(\nu^2) \quad (5)$$

である。これを用いると、包絡線と峰の差 δ は

$$\delta = \left\{ I_c(t_{amp}) I'_c(t_{amp}) + I_s(t_{amp}) I'_s(t_{amp}) \right\}^2 / \left[2\sigma_m^2 \left\{ I_c^2(t_{amp}) + I_s^2(t_{amp}) \right\}^2 \right] + o(\nu^2) \quad (6)$$

となり、その大きさが ν^2 のオーダーであることが確認できる（木村・太田(1993)を参照）。また、変換

Toshikazu Kitano, Takashi Nakanisi, Hajime Mase

$$\begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} I_c'(t) \\ I_s'(t) \end{pmatrix}, \quad R(t) = \frac{1}{A(t)} \begin{pmatrix} I_c(t) & I_s(t) \\ -I_s(t) & I_c(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

を用いると、 δ は

$$\delta = \zeta^2(t_{amp}) / \{2\sigma_m^2 A(t_{amp})\} + \alpha(v^3) \quad (8)$$

と表せて、変換が回転（等長かつ合同な変換）であるため、直ちに

$$p(A, \phi, \zeta, \xi) = A \exp\left(-A^2/(2m_0) - (\zeta^2 + \xi^2)/(2v^2\sigma_m^2 m_0)\right) / \{(2\pi)^2 v^2\sigma_m^2 m_0^2\} \quad (9)$$

が得られる。そして、式(8)より式(9)をさらに変換し、不要な変数 ξ で積分して、

$$p(A, \delta) = A^3 \exp\left(-A^2/(2m_0) - A\delta/(v^2 m_0)\right) / \{v\sqrt{\pi}\delta^2 m_0^3\} \quad (10)$$

を得る。さらに不要な変数 A で積分して、 $\hat{\delta} = \delta/(v^2\sqrt{m_0})$ の確率分布

$$p(\hat{\delta})d\hat{\delta} = \exp\left(-\frac{1}{2}\hat{\delta}^2\right)L_0(\hat{\delta})d\hat{\delta}/\sqrt{\pi}, \quad L_0(x) = \int_0^\infty (y-x)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)dy \quad (11)$$

を得る。その平均値を求めると、

$$\text{mean}(\hat{\delta}) = \int_0^\infty \hat{\delta} p(\hat{\delta}) d\hat{\delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (12)$$

であり、この値で無次元化したものを確率変数として図-1 に示す。木村・太田(1993)のシミュレーションの結果である図-2と比較して、その確率変数が大きい値をとるところで本論文で得られた分布は過小値をとることに注意する。上記 ii) で述べたようにわずかの確率で峰(谷)の付近で "amplitude" を持たず、また、その時には峰(谷)は包絡線からずいぶん離れることが原因となっている。

4. 峰高分布の概算 式(5)で得られた時刻を基にしてその時の水位変動、すなわち、峰高を求めると、

$$\eta(t_{crest}) = A(t_{amp}) + \{I_c(t_{amp})I_c'(t_{amp}) + I_s(t_{amp})I_s'(t_{amp})\}^2 / \left[2\sigma_m^2 \{I_c^2(t_{amp}) + I_s^2(t_{amp})\}^3\right] + \alpha(v^3) \quad (13)$$

となる。この第二項は δ に等しく、その結果、式(12)で $\hat{\eta}_c = (A + \delta)/\sqrt{m_0}$ と変換し、概算的な峰高分布

$$p(\hat{\eta}_c)d\hat{\eta}_c = \exp\left(-\frac{\hat{\eta}_c^2}{2v^2(2-v^2)}\right)d\hat{\eta}_c \cdot \int_0^{\hat{\eta}_c} \frac{(\hat{\eta}_c - x)^2}{v\sqrt{\pi x}} \exp\left\{\frac{(2-v^2)}{2v^2}\left(x - \frac{1-v^2}{2-v^2}\hat{\eta}_c\right)^2\right\} dx \quad (14)$$

を得ることができる。その結果を図-3に示す。ここで、概算的というのは峰高の水位変動の自乗平均との比が v のオーダーの時、不正確になるからである（北野(1995)を参照）。

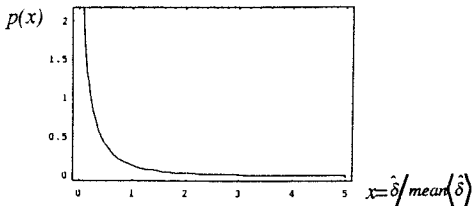


図-1 δ の分布 ($x = \delta / \text{mean}(\delta)$) での無次元化)

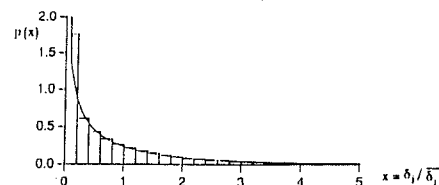


図-2 δ の分布 (木村・太田(1993)のもの)

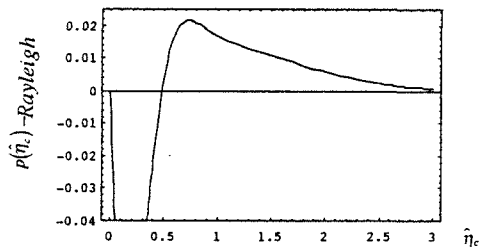


図-3 峰高分布と Rayleigh 分布の差 ($v=0.2$)

参考文献： Longuet-Higgins(1952): On the statistical distribution of the heights of sea waves, J. Mar. Res. vol. 11, pp. 245-266. 木村晃・太田隆夫(1993): ゼロクロス波で定義した不規則波の波高の確率特性について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp.146-150. Longuet-Higgins(1975): On the joint distribution of wave periods and amplitudes of sea waves, J. Geophys. Res. vol.80, pp.2688-2694. 北野利一(1995): 不規則波の統計的特性における包絡線の役割, 京都大学大学院工学研究科修士論文, 33p.