

京都大学工学部 正員
京都大学大学院 学生員

高棹琢馬
柴田 研

京都大学工学部 正員 椎葉充晴
京都大学大学院 学生員 柳原哲由

1 はじめに 降雨を入力とし河道への横流入を出力とする斜面流出システムをあるモデルで表現するとき、雨水の流れを的確に表現し、流れの場となる斜面の地形を十分に反映する必要がある。

わが国は山岳地帯が多く、山地流域の流出現象に大きな役割を果たしている中間流出現象を流出モデルの構成に際し考えなければならないといえる。こういった中間流出現象や降雨あるいは流れのパラメータの空間的分布を表現し、複雑な形状の斜面を取り扱うには、2次元モデルを構成することにより可能となる。

そこで、本研究では、2次元モデルへの導入として、kinematic wave法の基礎式(連続式、流量流積関係式)を用いて、山腹斜面系1次元モデルを構成し、数値計算をして、その妥当性を検証する。連続式は偏微分方程式であり、流量流積関係式は、流量と水深の関係が非線形であるので、実際に解析的に解くのは困難である。しかし、これら基礎式において、時間、空間を離散化し、基礎式を差分近似して差分方程式を構成することにより、基礎式を近似的に解くことが可能になる。さらに、流量流積関係式を準線形化すると、流出モデルの基礎式は水深に関する一次式で表すことができるので、線形な差分方程式を構成することができる。本研究では、この線形な差分方程式を反復法により解く手法を検討する。ここで、反復法を用いるのは、2次元への拡張を考えたとき、この方程式の係数行列を作り上げ、その後でそれを直接法で解くよりも、Gauss-Seidel法のような反復法によることにする方が簡明だからである。実際、反復法は係数行列を構成する必要がなくて、グリッドごとに計算式を作っていくことができる。

2 中間流・表面流の基礎式 本研究の1次元モデルは、斜面の傾斜角が空間的に変化する。

山腹表層は透水性の高い層(A層)で覆われているものとし、その層厚を D とする。降水は直ちにA層に浸透するので、水深 h が D を越えるまでは流れは中間流だけであり、水深 h が D を越えた時にはじめ

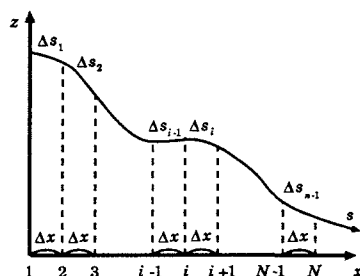


図1 空間の離散化

て表面流が発生する。また、A層底からの浸透はないとする。

空間、時間の離散化について述べる。空間の離散化については、斜面の上端から下端まで、 s 軸ではなく水平方向の x 軸について等間隔になるように斜面を分割する(図1)。斜面上端の格子点番号を1として、 x 軸、 s 軸の増加する方向に2, 3, 4, ...と格子点番号を与えていくものとすれば、斜面を N 個に分割すると斜面下端の格子点番号は N となる。

斜面上端から斜面に沿って格子点 i に至る道のりを s_i と表す。 $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ と表すと、この Δs_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$)は必ずしも等しくならない。時間の離散化については、時間ステップを j ($j = 1, 2, \dots$)とし、時刻 t_j から時刻 t_{j+1} までの時間間隔を Δt_j とする。

基礎式を線形な差分方程式に近似するにあたり、空間 s_i の値をどの時刻で評価するかであるが、 t_{j+1} 、もしくは t_j と t_{j+1} の間、つまり時刻 $t_{j+a} = t_j + a(t_{j+1} - t_j)$ ($0 < a \leq 1$)で空間 s_i の値を評価する。格子点 i ($i = 1, 2, \dots, N$)、時刻 t_j における流量流積関係式は、

$$q_i^j = \begin{cases} \frac{k}{\gamma} (\sin \theta_i - \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{i,j}) H_i^j & (H_i^j < \gamma D) \\ \frac{k}{\gamma} (\sin \theta_i - \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{i,j}) H_i^j + \frac{1}{n} (H_i^j - \gamma D)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin \theta_i - \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{i,j}} & (H_i^j \geq \gamma D) \end{cases}$$

となる[1]。ここで、添字 i は格子点番号を、添字 j は時間ステップを表し、 q は単位幅流量(m^2/sec)、 γ はA層の有効空隙率、 k はA層の透水係数(m/sec)、

n は Manning の粗度係数, θ は斜面の傾斜角である。また, H は単位面積の斜面の実際の貯水高を示しており, 本研究ではこの H を実質水深と呼ぶ。実質水深 H と水深 h の関係式は以下になる。

$$h_i^j = \begin{cases} H_i^j / \gamma_i & (H_i^j \leq \gamma_i D_i) \\ H_i^j + (1 - \gamma_i) D_i & (H_i^j > \gamma_i D_i) \end{cases}$$

連続式は, 格子点 i において連続式を時間について前進差分近似し空間について中心差分近似すると,

$$\frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{\Delta t_j} + \frac{q_{i+\frac{1}{2}}^{j+a} - q_{i-\frac{1}{2}}^{j+a}}{\Delta S_i} = r_i^{j+a} \cos \theta_i \quad (1)$$

となる。ここで, $r_i^{j+a} = ar_i^{j+1} + (1-a)r_i^j$ は有効降雨強度 (m/sec) である。単位幅流量 q は異なる格子点の連続式の領域が重複しないよう格子点間の midpoint で計算する。格子点 i は実質水深計算点, 中点 $i-1/2$ は流量計算点と呼ぶ。 ΔS_i は流量計算点間の長さである。

3 流量流積関係式の準線形化 今, m 回目の反復計算を行なうとする。実質水深計算点 i , 時刻 t_j における実質水深 H_i^j , 実質水深計算点 i , 時刻 t_{j+1} における実質水深の推定値 $H_i^{j+1(m)}$ が既知とする。ここで, 添字 (m) は m 回目の反復計算を表す。実質水深計算点 i , 時刻 t_{j+a} において実質水深 $H_i^{j+a(m)} = aH_i^{j+1} + (1-a)H_i^j$ とする。流量流積関係式を準線形化, つまり, 流量流積関係式を流積の推定値 $H_i^{j+a(m)}$ の周りに Taylor 展開して流積の 1 次の項までとった線形式で近似すると, 準線形化された流量流積関係式は,

$$q_i^{j+a} = P_i^{j+a(m)} H_i^{j+a} + Q_i^{j+a(m)} \quad (2)$$

と表すことができる。ここで, $P_i^{j+a(m)}, Q_i^{j+a(m)}$ は既知の値を用いて計算できる値である。

4 数値解法 流量計算点における単位幅流量 $q_{i+\frac{1}{2}}$ は両隣の実質水深計算点までの斜面長さを考慮した平均をとることとすると,

$$q_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} = \frac{\Delta s_r q_i^{j+a(m)} + \Delta s_l q_{i+1}^{j+a(m)}}{\Delta s_r + \Delta s_l} \quad (3)$$

となる。ここで, $\Delta s_r, \Delta s_l$ はそれぞれ隣の実質水深計算点 $i, i+1$ までの斜面長さである。(2) と (3) より単位幅流量 $q_{i+\frac{1}{2}}$ は,

$$q_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} = A_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} H_i^{j+1} + B_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} H_{i+1}^{j+1} + C_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} \quad (4)$$

と表すことができる。 $A_{i+\frac{1}{2}}, B_{i+\frac{1}{2}}, C_{i+\frac{1}{2}}$ は $a, \Delta s_r, \Delta s_l$ と (2) の $P_i^{j+a(m)}, Q_i^{j+a(m)}$ と時刻 t_j での実質水深 H_i^j を用いて計算できる。(1) は (4) より,

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\Delta t_j}{\Delta S_i} A_{i-\frac{1}{2}}^{j+a(m)} \\ F &= 1 + \frac{\Delta t_j}{\Delta S_i} (A_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} - B_{i-\frac{1}{2}}^{j+a(m)}) \\ G &= \frac{\Delta t_j}{\Delta S_i} B_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} \\ K &= H_i^j + \Delta t_j (ar_i^{j+1} + (1-a)r_i^j) \cos \theta_i \\ &\quad - \frac{\Delta t_j}{\Delta S_i} (C_{i+\frac{1}{2}}^{j+a(m)} - C_{i-\frac{1}{2}}^{j+a(m)}) \end{aligned}$$

とすると,

$$EH_{i-1}^{j+1(m+1)} + FH_{i+1}^{j+1(m+1)} + GH_{i+1}^{j+1(m+1)} = K \quad (5)$$

となり, 実質水深に関して線形な差分方程式が構成される。(5) を反復法の一つである Gauss-Seidel 法を用いて時刻 t_{j+1} における実質水深を求める。

5 数値計算例 解析解を得ることを容易にするために, 一様な斜面で数値計算をした。 $a = 1/2$ で計算したところ不自然な振動が観測されたため(図2), 微分を差分に置き換えたため生じる打ちきり誤差について検討したところ, $a = 1$ のときめらかな結果が得られた(図3)。

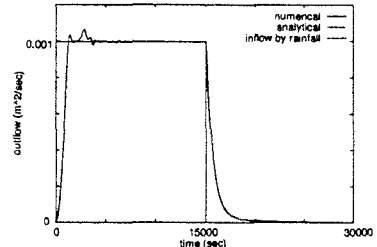


図2 時刻 $t_{i+1/2}$ で移流項を評価

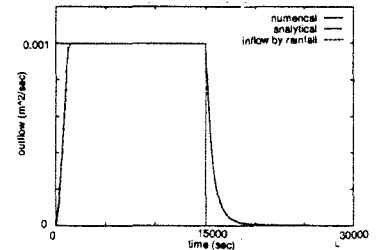


図3 時刻 t_{j+1} で移流項を評価

6 おわりに 本研究では, 2次元モデルへの導入として中間流出を扱える1次元流出モデルを提示した。今後は, 各々の地点でパラメータが異なる場合などいろいろな状況において計算モデルを検証する必要がある。

参考文献

- [1] 柴田 研 (1994): 山腹斜面系2次元流出モデルの構成, 京都大学卒業論文。