

大阪市立大学大学院 学会員 ○石丸 和宏

大阪市立大学工学部 正 員 小林 治俊

大阪市立大学工学部 正 員 園田恵一郎

1. はじめに 積層板は最近種々な工学分野において用いられている。そのため衝撃荷重を受ける際の応力波の伝播を含む応力変動を明らかにしておくことは重要と思われる。本研究は、矩形板を対象に三次元動弾性論に基づく解析を行ったものである。解析手法にはこれまで著者らが多層構造の解析に用いている固有関数展開法（モード法）[1, 2]を用いる。

2. 基礎式 取扱う多層矩形板の座標系を図1に示している。矩形板は $(x=0, a)$, $(y=0, b)$ で単純支持され、各層は完全接着とする。座標 $X=(x, y, z)$ 方向の変位を $U=(u, v, w)$, λ , μ をラメの定数, ρ を密度とすれば、物体力の存在しない場合、ベクトル表示の運動方程式は次式である。

$$\mu \nabla^2 U + (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} U) = \rho \ddot{U} \quad (1)$$

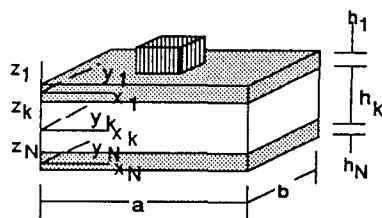


図1. 多層矩形板の座標系

ここに、ドットは時間 t に関する微分を意味し、 ∇^2 はラプラシアソンである。応力式は省略する。なお、上式を含め関連する諸量は矩形板の各層において成立するので、以後添字 $k(k=1 \sim N)$ を付して k 層目における諸量を表すことにする。衝撃荷重を $F(x_1, y_1, t)$ として上面に作用するものすると、境界および連続条件は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \text{周面において,} \quad & v_k = w_k = \sigma_{x, k} = 0 \quad (x=0, a), \quad u_k = w_k = \sigma_{y, k} = 0 \quad (y=0, b) \\ \text{上下面において,} \quad & \sigma_{z, 1} = -F(x_1, y_1, t), \quad \tau_{yz, 1} = \tau_{zx, 1} = 0 \quad (z_1 = h_1/2) \\ & \sigma_{z, N} = \tau_{yz, N} = \tau_{zx, N} = 0 \quad (z_N = -h_N/2) \\ \text{接合面において,} \quad & \text{変位}(u, v), \text{ 応力}(\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \text{ の連続} \end{aligned} \quad (2)$$

3. 衝撃応答解析 式(1)の解を、慣性力の影響を無視した荷重 $F(x_1, y_1, t)$ による解（準静的解 U_k^s ）と慣性力の影響を考慮した解（擾乱解）の和として次のように与える。

$$U_k(X_k, t) = U_k^s(X_k, t) + \sum_{p=1}^{\infty} Q^{(p)}(t) \phi_k^{(p)}(X_k) \quad (3)$$

擾乱解において $Q^{(p)}(t)$ は未定の時間関数であり、また $\phi_k^{(p)}(x_k)$ は p 次の自由振動モード（固有関数）であるが、準静的解とともにその内容は省略する。

式(3)を式(1)に代入し、固有関数の直交性等を利用すると $Q^{(p)}$ に関する2階の微分方程式を得る：

$$\ddot{Q}^{(p)} + \omega^{(p)2} Q^{(p)} = -\dot{Z}^{(p)}, \quad Z^{(p)}(t) = \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \rho_k U_k^s \phi_k^{(p)} dV_k \right\} \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \rho_k \phi_k^{(p)2} dV_k \right\}^{-1} \quad (4)$$

4. 数値計算例 ここでは上層がコンクリート、下層が鋼よりなる2層正方形板($b/a=1$)と上下層が鋼、中間層がコンクリートの3層正方形板を取り扱い、その板厚比は $h/a=1/3$ 、鋼層の厚さはいずれも $0.1h$ とする。材料定数は、コンクリートの密度、ポアソン比、ヤング率を $\rho_c=2.3(\text{tf/m}^3)$, $\nu_c=0.167$, $E_c=2.4 \times 10^6(\text{tf/m}^2)$ 、鋼では $\rho_s=7.85(\text{tf/m}^3)$, $\nu_s=0.3$, $E_s=2.1 \times 10^7(\text{tf/m}^2)$ とした。衝撃荷重は空間には最大強度 q の二方向正弦荷重、時間に関してはステップ荷重、すなわち $F=qh(t)\sin(\pi x_1/a)\sin(\pi y_1/b)$ で

ある。なお紙面の都合上、板中央断面($x_1=a/2$, $y_1=b/2$)の応力 σ_z , σ_x の応答曲線のみを以下に示し、時間はコンクリート内部を縦波が板厚 h を進むのに要する時間を1とする無次元時間 τ ($= [(\lambda_c + 2\mu_c)/\rho_c]^{1/2} t/h$)を用いている。

図2は2層板の応答曲線である。まず σ_z であるが、応答曲線が不連続に変動している箇所は入射・反射さらには透過した応力波の波面が到達したことを示している。上層の最初の応答値は荷重強度 q であるが、接合面、下層中央での応答値は q を越えている。これは応力波が剛性の低い上層(コンクリート)から高い下層(鋼)へ透過するとき増幅されるからである。この増幅された応力波が自由面である下面で反射され位相が逆になり、この応力波により接合面などで q よりも大きな引張り力が発生している。次に応力 σ_x であるが、剛性の高い下面で最大引張応力が発生している。

図3は3層板の応答曲線である。 σ_z の応答で中間層の最初の応力値が q よりも小さいのは剛性の高い上層から低い中間層へ応力波が透過するからである。 σ_x の応答は2層板と同様に剛性の高い鋼に応力が集中し、上下面の最大応答値はほぼ同様の圧縮・引張りとなっている。下面の最大応答値は2層板のほうが2割ほど大きい。

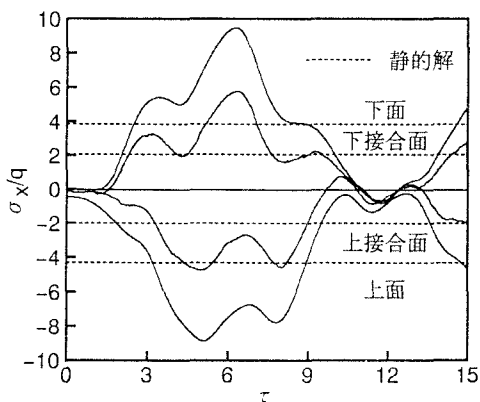
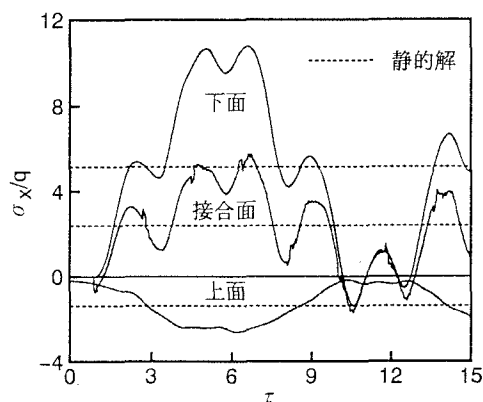
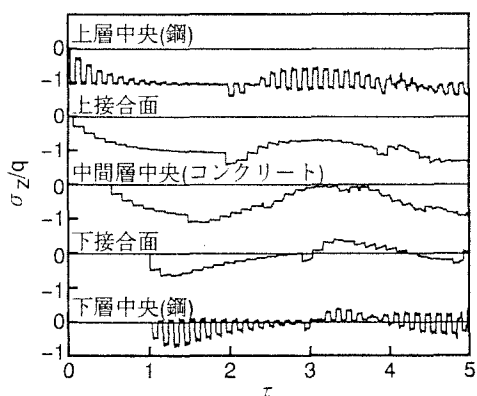
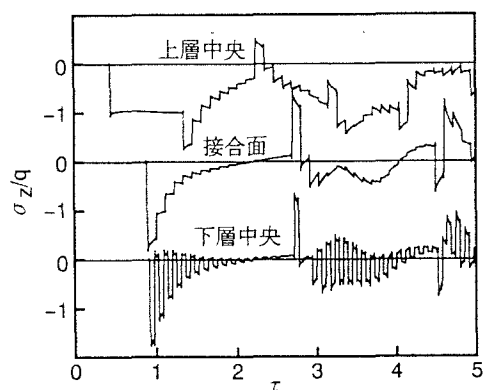


図2. 2層矩形板の応力 σ_z , σ_x の応答曲線

図3. 3層矩形板の応力 σ_z , σ_x の応答曲線

5. おわりに 本文では衝撃荷重を受ける多層矩形板を固有関数展開法により解析する方法を示し、平板理論では示し得ない板厚方向の応力波の伝播を示した。

参考文献 [1] 小林, 他: 鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, 1992.

[2] 小林, 他: 軸対称多層円筒の弾性衝撃解析, 構造工学論文集, Vol. 39A, 1993, など。