定常正規過程の再帰的表現とARモデルの関係について

京都大学工学部　正会員　○盛川　仁
京都大学防災研究所　正会員　亀田　弘行

1. はじめに　地震動や風速変動等の不確定な動的現象に対してしばしば適用される，離散化された定常正規過程を数値的に取り扱うための手法には大きく分けて2つある。一つは振動数領域でスペクトルを用いるもの[1]で，もう一つは時間領域で自己回帰的に表現するもの[2]である。ところで，スペクトル特性がわかっている確率過程のとった値をある瞬間にはモニターできるというような場合には，ある瞬間に，ある値をとったということがわかっているという条件のもとでの条件付確率過程を取り扱う必要がある。しかし，上で述べた従来の手法ではこのような要求に応えることができない。本研究では，このような問題を解決するための理論的な枠組みを与えるために，過去の実現値を条件として含む条件付確率過程の時間軸上での条件付確率密度関数を用いた再帰的表現を示す。その結果，時間軸上のある瞬間の実現値を条件として含む定常正規過程の確率論的性質を，確率密度関数を基礎とした議論が可能となった。また，時間軸上での定常正規過程の高速な数値シミュレーション法にも言及する。最後にこの表現法がAR過程を内包しており，確率密度関数を基礎とするAR過程の新たな表現法であることを示す。

2. 定常正規過程の再帰的表現　等時間間隔で離散化された時刻$t_1, t_2, \cdots, t_N$ (Nは任意) において値が与えられる，平均値0，分散σ_X^2の定常正規過程$X(t)$を考える。$X(t)$の自己相関関数は与えれられているものとすると，${}_N\boldsymbol{X}^T = (\ X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_N)\ )$の$N$-次元同時確率密度関数は次のように表される[3]。

$$f_{{}_N X}({}_N\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |{}_N\boldsymbol{C}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\,{}_N\boldsymbol{x}^T\,{}_N\boldsymbol{C}^{-1}\,{}_N\boldsymbol{x}\right], \tag{1}$$

ここで，左下の添字はベクトルや行列の次数を表すものとする。また，${}_N\boldsymbol{C}$は自己共分散行列を表し，そのij要素$[{}_N\boldsymbol{C}]_{ij}$は$C_{|i-j|} = \langle X(t_i)X(t_j)\rangle$である。

式(1)を用いて，t_n以前の$X(t)$の実現値${}_{n-1}\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$を条件とする$X(t_n)$の条件付確率密度関数を求める。行列${}_n\boldsymbol{C}$の逆行列の計算が必要であるが，

$${}_n\boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{c|c} {}_{n-1}\boldsymbol{C} & {}_{n-1}\boldsymbol{D} \\ \hline {}_{n-1}\boldsymbol{D}^T & C_0 \end{array}\right] \tag{2}$$

のように分割すると，${}_n\boldsymbol{C}^{-1}$は${}_{n-1}\boldsymbol{C}^{-1}$と${}_{n-1}\boldsymbol{D}$を用いて表すことができる[4]。そこで，${}_{n-1}\boldsymbol{P} = {}_{n-1}\boldsymbol{C}^{-1}\,{}_{n-1}\boldsymbol{D}$, $Q = C_0 - {}_{n-1}\boldsymbol{D}^T\,{}_{n-1}\boldsymbol{C}^{-1}\,{}_{n-1}\boldsymbol{D}$とおけば，

$$f_{X(t_n)|{}_{n-1}X}(x_n|{}_{n-1}\boldsymbol{x}) = \frac{f_{{}_n X}({}_n\boldsymbol{x})}{f_{{}_{n-1}X}({}_{n-1}\boldsymbol{x})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x_n - {}_{n-1}\boldsymbol{x}^T\,{}_{n-1}\boldsymbol{P})^2}{Q}\right] \tag{3}$$

が得られる[5]。

以上より，実現値が与えられていない定常正規過程$X(t)$の数値シミュレーションでは，$t = t_1$から順に式(3)を満足する確率変量をシミュレートしていけばよいことがわかる。その際，$t = t_{n-1}$の計算で用いた${}_{n-2}\boldsymbol{C}^{-1}$を使って$t = t_n$の計算で必要となる${}_{n-1}\boldsymbol{C}^{-1}$が求まるので，計算量を節約することができる。また，任意のℓ個の時刻で$X(t)$の実現値が与えられている場合には，最初から${}_\ell\boldsymbol{x}$を与えておいて上の定式化を適用すればよい。このように，式(3)を用いて定常正規過程を再帰的に表現することにより，条件の有無にかかわらず統一的な取り扱いが可能となった。

Hitoshi MORIKAWA and Hiroyuki KAMEDA

3. 高速な数値シミュレーションのための truncated recurrent process　数値シミュレーションをディジタル計算機を用いて行う場合，n が大きくなると，${}_nC^{-1}$の計算において精度，速度共に悪くなるため，前節の結果をそのまま大規模な計算に適用することは実際的ではない。そこで，2 つの時刻 $t = t_i$と $t = t_j$における $X(t)$ の実現値は，$|t_i - t_j|$ が十分大きいときには相関が小さくなってお互いの影響を無視できることを利用して，自己共分散行列の次数がある程度以上の大きさにならないようにする。すなわち，ある適当な定数 m に対して，$n < m$ ならば前節で述べた方法をそのまま適用してシミュレーションを行い，$n > m$ ならば m ステップより過去の $X(t)$ の実現値は無視してシミュレーションを行う。従って自己共分散行列の次数は m を越えることはない。このように相関が低い過去の実現値を無視した確率過程を以下では "m 次の truncated recurent process (TR 過程)" と呼ぶことにする。

定常過程を上のような考えに基づいて TR 過程で近似すると，$n > m$ なる任意の n に対して自己共分散行列は常に${}_mC$で表されることとなる。従って数値シミュレーションを行う際には，$n = 1$ から順に n を大きくして計算を進め，n の値が$n > m$ を満たす時刻から後は逆行列の計算を全て省略して実現値のシミュレートだけを行なえばよい。その結果，計算時間の大幅な短縮と計算の安定性を得ることができる。n が m に対して十分に大きい時刻まで計算を行う場合には，AR 過程による計算の場合と同様に FFT (高速フーリエ変換) を用いる計算よりも計算量は少なくなる。

4. TR 過程と AR 過程の関係について　この節では TR 過程と AR 過程の数学的な関係を明らかにする。まず，m 次の自己回帰 (AR) 過程を

$$x_n = \sum_{i=1}^{m} a_i x_{n-m+i-1} + v_n = {}_m\hat{\boldsymbol{x}}^T\, {}_m\boldsymbol{a} + v_n \tag{4}$$

と表す。ベクトルや行列につけられたハット (ˆ) は m ステップ以前の $X(t)$ の実現値が無視されていることを示している。ここで${}_m\boldsymbol{a}^T = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ は AR パラメータで v_nは平均値 0，分散$\sigma_{v_n}^2$ の正規変量である。式 (4) から Yule-Walker の方程式を導き，その解を求めると，

$$ {}_m\boldsymbol{a} = {}_m\hat{\boldsymbol{C}}^{-1}\, {}_m\hat{\boldsymbol{D}} = {}_m\hat{\boldsymbol{P}} \qquad \sigma_{v_n}^2 = C_0 - {}_m\hat{\boldsymbol{D}}^T\, {}_m\hat{\boldsymbol{P}} \tag{5}$$

となる。式 (5) の第一式を式 (4) に代入すると，x_nは $x_n = {}_m\hat{\boldsymbol{x}}^T\, {}_m\hat{\boldsymbol{P}} + v_n$と書き改められる。この結果と式 (5) の第二式から，$X(t_n)$ を TR 過程として表した場合，$n > m$ において $X(t_n)$ は AR 過程から定まる x_nと全く同じ確率論的性質を有していることがわかる。

5. おわりに　本研究では，定常正規過程を時間軸上で，条件付確率密度関数を用いることで再帰的に表した。その上で，ある瞬間にある実現値をとったという条件を含む条件付確率過程のシミュレーション法を示した。相関の低い過去の実現値を無視することで計算の安定性を向上させ，かつ数値シミュレーションを非常に高速で行うことができる TR 過程を定義した。また，TR 過程は時間軸上での実現値を条件とすることも可能であるという意味で従来の AR 過程を理論的に内包しているということができる。このことを言い換えると，これまでスペクトル表現等をもとに定義されていた AR 過程を確率密度関数の観点からも矛盾なく説明することができるということである。

謝辞　プリンストン大学の篠塚正宣教授には本研究のきっかけを与えていただいた。また京都大学防災研究所の佐藤忠信教授，武蔵工業大学の丸山收講師には時系列理論について有意義な議論をしていただいた。記して感謝の意を表する次第である。

参考文献　1) Rice, S. O., Mathematical analysis of random noise, *Selected papers on Noise and Stochastic Processes* (edited by N. Wax), Dover Publications Inc., New York, 1954, pp.133–294.　2) Box, G. E. P. and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis, forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.　3) Yaglom, A. M., *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* (translated and edited by R. A. Silverman), Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1962.　4) 栖原二郎：マトリックス算法概説，培風館，1971, pp.49–54.　5) 星谷勝・桑名智英：条件付確率場のシミュレーション理論の検証，土木学会論文集，No.477/I-25, 1993, pp.93–96.