第Ⅳ部門　　# グラフ理論にもとづく経路探索問題に関する理論的研究

立命館大学　　　　　正　員　　春名　攻
立命館大学大学院　学生員　○山田　幸一郎
立命館大学大学院　学生員　　滑川　達

1．はじめに

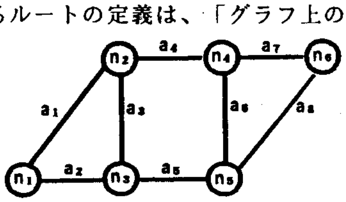
本研究においては、グラフ理論で取り扱われている接続行列に着目し、無向グラフを対象として、ある目的を達成するために有効とされる可能性のあるルート（以下、基底ルートと呼ぶ）のみを選定する基底ルート探索方法の理論的開発をおこなった。ここで、基底ルートとは、グラフ上のS～S間（Sourse to Sink）をサイクルしないルートのことであり、言い替えれば最短路等の問題で検討される価値を持つ可能性を秘めているルートのことである。

また、最短経路問題に対しても、最短路を求めるために基底ルートの探索方法を応用させることにより、より合理的に最短路を求めることができた。

2．基底ルートの定義

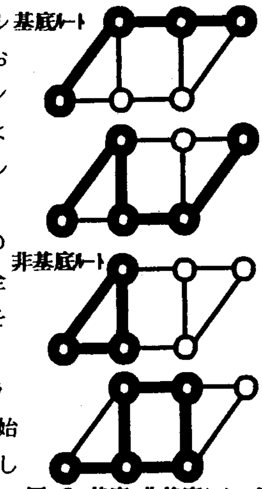
本研究においては、ある目的を達成させる可能性を持つルートを基底ルートとし、そして、サイクルするルートを非基底ルートと定義することとした。

サイクルルートを基底ルートとして扱わなかった理由は、グラフ上をサイクルするルートは永遠にサイクルを繰り返してしまうというような問題を抱えているためであり、これを非基底ルートとした。つまり、サイクルしない目的達成のための可能性のあるルートを、基底ルートと定義することとする。サイクルするルートの定義は、「グラフ上の任意の地点を２回以上通過するルート」とし、本研究においては、後述するカウント行列を用いることにより、このサイクルするルートを排除し、そして、無向グラフの接続行列のみを用いることにより全ての基底ルートの抽出をおこなうことができた。以下に図－１の例題グラフを用いてノードn_1を始点、ノードn_6を終点として基底ルートの探索方法について述べていくこととする。図－１中の行列は対象グラフの接続行列を示す。それに、図－２には、この例題での始点、終点間での基底ルートと非基底ルートの一例を示しておく。



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
n_1	1	1						
n_2	1		1	1				
n_3		1	1		1			
n_4				1		1	1	
n_5					1	1		1
n_6							1	1

図－１　対象グラフとその接続行列



図－２　基底 非基底ルート一例

3．無向グラフ上での基底ルートの潜在性の検討

対象としている基底ルートは、S～S間を流れるルートを取り上げているために、対象とするグラフが無向グラフだとしても、取り扱う任意の基底ルートが始点から終点へ向かう方向性を持つルートとなるために、必然的にそのルートを構成している各々のアークは方向を持っていると考えることができる。本研究では、無向グラフから基底ルートの抽出をおこなうために、以下に述べるように有向グラフの性質を把握し、無向グラフに有向グラフの性質を導入する事により、無向グラフの接続行列のみから方向性を持つルートの抽出を可能とした。

特に、基底ルート探索をおこなうために、グラフの性質、すなわち、

「ある流れがアークa_iからあるノードn_jに入り込むと、そのノードn_iからはアークa_i以外の他のアークa_kに流れる。」

Mamoru HARUNA, Koichiro YAMADA, Susumu NAMERIKAWA

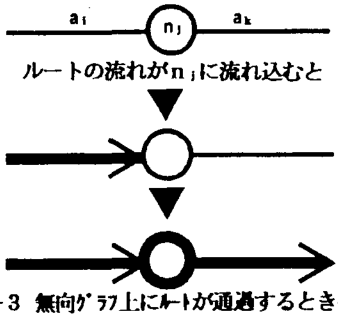
に着目した。これをグラフ理論で扱っている有向グラフの接続行列（I）で表わすと、

「アークa_iからノードn_jに入り込む時は、I（n_j, a_i）＝－１であり、ノードn_jから他のアークa_kに流れる時には、I（n_j, a_k）＝＋１である。」となり、無向グラフの接続行列で示すと、

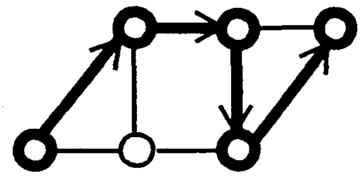
「アークa_iからノードn_jに入り込む時は、I（n_j, a_i）＝１であり、ノードn_jから他のアークa_kに流れる時には、I（n_j, a_k）＝１である。」となる、しかし本研究では、ある流れがアークa_iからノードn_jに流れ込むとき、無向グラフの接続行列であっても仮に、

「アークa_iからノードn_jに入り込む時は、I（n_j, a_i）＝－１であり、ノードn_jから他のアークa_kに流れる時には、I（n_j, a_k）＝＋１である。」と考えることができることに着目した。これを図を持って示すと、図－３のように無向グラフであっても有向グラフであるかのように表現することができる。この性質を活かして無向グラフに有向性を持たせ、ルートの流れを合理的かつ効率的に抽出することが可能となってくるのである。すなわち、この性質をＳ～Ｓ間で用いることにより本研究で取り上げている基底ルートが抽出できることとなる。なぜならば、任意の全てのルートは、始点から終点に流れる基底ルート、または、サイクルを発生させる非基底ルート以外には存在しないために、ルートは、始点からこの性質を用いることにより最終的にはサイクルをおこなうかあるいは終点にたどり着くまで流れるのである。ただし、サイクルするルートは排除しなければならない。

図－４には、対象となっている無向グラフのある一つの基底ルートを以上の考えから無向グラフの接続行列で表わしたものを示す。



図－３　無向グラフ上にルートが通過するときの図



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
n_1	+1							
n_2	−1			+1				
n_3								
n_4				−1		+1		
n_5						−1		+1
n_6								−1

▽

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	②
n_1	1								1
n_2	1			1					1
n_3									
n_4				1		1			1
n_5						1		1	1
n_6								1	1
①	1			1		1		1	

←カウント行列

図－４　基底ルートを接続行列上で表わした図

４．サイクルルート排除のための定式化

サイクルを「する・しない」を判断させるためには、前述した探索によりルートに方向を持たせ、サイクルする時点で何らかのサイクルをおこなうということの判断をおこない、サイクルルートを排除させる必要があると考えた。結果、サイクルするルートを排除することにより、全ての基底ルートを抽出することができるはずである。本研究では、サイクルルートを排除するためのカウント行列を設けることにより、そのサイクルルートの削除をおこなうことができた。カウント行列の適用については、基底ルートとサイクルルートの一例を用いて説明することとする。

図－４は、一例の基底ルートについてルートを接続行列上に示したものである。カウント行列（図中の①,②の行列）は、ルートの通過地点を把握できるように、グラフ上のルートがそれぞれのアーク、ノードに通過する毎にカウントを重ねていくものであり、ルートが２回以上同地点を通過するものがサイクルルートとなり、これよりサイクルルートを排除することを可能とさせるものである。

図－４での基底ルートは、①，②のカウント行列

から、ルートの通過するいずれのノード、アークを一度のみ通過したことを示しており、サイクルはしていないことがわかる。また、図－５は、サイクルするルートについて示したものであるが、カウント行列の値が、接続行列 I（n_2, a_4）の地点でサイクルすることとなりカウント行列は２とカウントされ、サイクルするルートと判断させることができる。

ここで、①のカウント行列を A_i, ②のカウント行列を N_j としたときに、

サイクルルート

$A_i = 2 \quad \cup \quad N_j = 2$

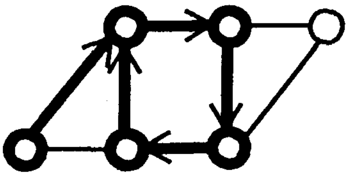
基底ルート

$A_i \leq 1 \quad \cap \quad N_j \leq 1$

（i=1, 2, ･･･, l）　l：アーク数

（j=1, 2, ･･･, m）　m：ノード数

となり、これを用いてサイクルするルートを排除し、基底ルートのみの抽出をおこなえることとなる。



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	②
n_1	1								1
n_2	1		-1	-1					2
n_3			1		-1				1
n_4				1		-1			1
n_5					1	-1			1
n_6									
①	1		1	1	1	1			

←カウント行列

図－５ サイクルルートを接続行列上で表わした図

５．基底ルート抽出方法とその定式化

対象とするグラフには当然基底ルートが複数存在しているわけであるが、全ての基底ルートは、ルートの探索をおこなった結果、一つの探索木として表わすことができる。本研究では、この複数の基底ルートを求めるために、接続行列をベースとした探索問題に展開することを可能とした。その接続行列を用いて全ての基底ルートを求めるために、本研究は、前述したサイクルルートの排除と、ルートの流れの性質を利用すること、それに、ルート抽出問題を探索問題とすることにより基底ルートの抽出することを可能としたのである。ここでは、基底ルートの抽出方法とその定式化について述べることとする。

そこで、基底ルート抽出の方法について図－１の対象グラフとその接続行列を用いて説明することとする。まず、初期条件で与えられている始点 n_1 から流れは始点に隣接しているアーク a_1, a_2 に流れる。つづいて、アーク a_1 のみについて考えると、アーク a_1 は、ノード n_2 に流れ、ノード n_2 からアーク a_3 または a_4 に流れる。これを接続行列で示すと、流れは I（n_1, a_1）から縦に I（n_2, a_1）へ流れ、I（n_2, a_1）から横に I（n_2, a_3）または、I（n_2, a_4）に流れることとなる。これをサイクルする、もしくは終点にたどり着くまで繰り返すこととなる。つまり、これは対象となっている無向グラフの接続行列（0, 1 表示）上をルートが方向性を持ち、接続行列 I 上をルートが縦→横→縦→横というように I（n_i, a_j）は I（n_i', a_j）に流れ、I（n_i', a_j）から I（n_i', a_j'）へ流れることを繰り返すという性質を有していることとなるのである。また、接続行列を、縦にルートが流れるときにルートが他の複数のノードに流れ込み、横にルートが流れるときにルートが複数のアークに流れ込むという場合もあるが、これはルートの数がその分増え、ルートを探索していくうえでの探索の枝が増えていくこととなることを意味している。そして、図－６の探索木のように、全ての流れがサイクルする、もしくは基底ルートとして終点に流れるまでこの探索を続け、最終的には探索を全て終了させ、対象とするグラフでの全ての基底ルートを抽出することができることとなる。

ここで、$I^{(1)}$（n_i, a_j）を接続行列の値が１である（n_i, a_j）地点とすると、基底ルート抽出探索の定式は、

始点である $I^{(1)}$（s, s_a）から

$I^{(1)}(n_i, a_j) \rightarrow I^{(1)}(n_i', a_j)$

$\rightarrow I^{(1)}(n_i', a_j')$

但し、$(n_i, a_j) \neq (n_i', a_j)$

$(n_i', a_j) \neq (n_i', a_j')$

を、終点である $I^{(1)}$（g, g_a）に到達する、もしくはサイクルするまで繰り返す。

但し、探索していく過程でサイクルルートを排除するために、制約条件を、

$A_i \leq 1 \quad \cap \quad N_j \leq 1$

(i=1, 2, ･･･, l)　l：アーク数

(j=1, 2, ･･･, m)　m：ノード数

とする。

そして、基底ルートR_k(k=1, 2, ...)＝［$I^{(1)}$（s, s_a），・・・，$I^{(1)}$（n_i, a_j），$I^{(1)}$（n_i', a_j），$I^{(1)}$（n_i', a_j'），・・・・$I^{(1)}$（g, g_a）］が得られる。ここで、s，gは、始点、終点のノードを、s_a，g_aは、始点、終点のノードと結合しているアークとする。

また、サイクルルートは、探索していく過程で

$A_i = 2 \quad \cup \quad N_j = 2$

となるときまでの経路を指す。

この方法を用いて例題のグラフを探索させた結果、図－6で示す探索をおこなったこととなる。

そして、本研究では、ルートを探索させていく過程での計算量を軽減するために、計算量削減で有効な手法である動的計画法を適用することにより、より効率的に基底ルートの抽出をおこなうこととした。

6．諸問題への応用

今回の有効ルート探索方法は様々な問題に対しての有効な手法となってくるものとなる。例えば、最短経路問題においては、アークに距離、時間等の要素を加え、ルートを探索させていく過程において始点からの距離等の和を考慮し、算量削減のために動的計画法を用いることで最短路を効率的に抽出することが可能となる。また、交通流量問題に対しても、ここで求められた各々のルートが最適解のルートの一部となり得るために、ルートを探索させる過程で派生してくる複数のルート、有効ルートを抽出した後にそれらの有効ルートを合成させることにより最適解が抽出される。それに、具体的な交通の問題としての交通流量問題、駐車場、施設の立地場所を考える場合に対しても、交通の様々な影響をグラフに付加させることにより最適案を求めることが可能となってくる。

7．おわりに

本研究では、無向グラフを対象とした全ての基底ルートを、グラフの性質を合理的に導入し、効率的に接続行列のみから抽出することにより可能とした。ここで抽出されたルートは、土木計画学で取り扱われているネットワーク問題の実用的な問題への有効な要因となってくるものと考え、今後はこれらの問題に対して有効な数理計画手法としての展開を試みることとする。

【参考文献】

1) 伊理　正夫，古林　隆：ORライブラリー12　ネットワーク理論，日科技連，1992，3.

2) 杉山　昌平：ORライブラリー8　動的計画法，日科技連，1991.2.

3) 飯田　恭敬：基礎土木工学シリーズ22　土木工学システム分析-最適化編-，森北出版，1991.4.

4) C.Berge：Theory of Graphs and its Application, John Wiley and Sons.inc., 1966.

5) R.Bellman and S.Dreyfus：Applied Dynamic Programming , Princeton　University Press, 1962.

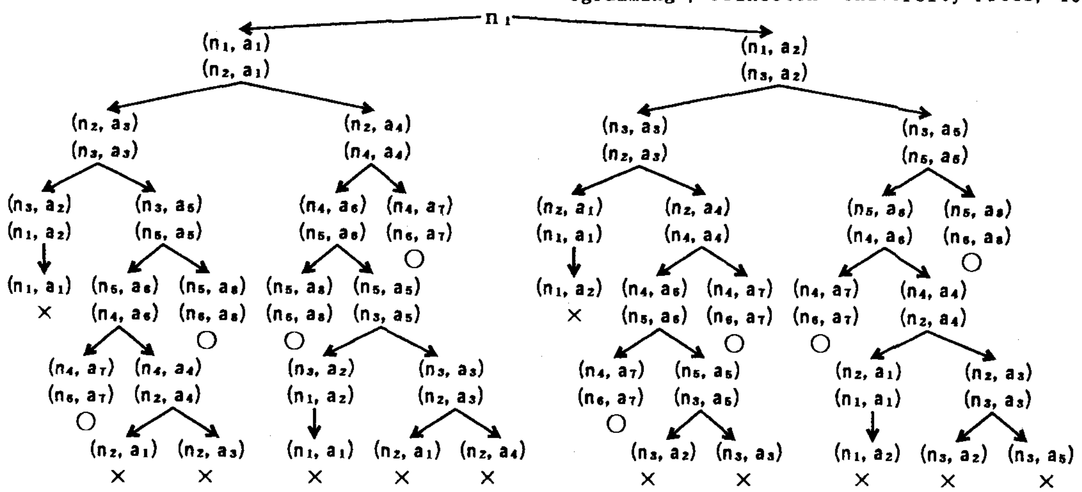


図-6　探索結果のtree図（○:基底ルート, ×:非基底ルート）