ひずみ空間 Cam-clayモデル

大阪大学工学部　正　員　阿部信晴
大阪大学工学部　学生員○安井利彰

1．まえがき

ひずみ空間における弾塑性理論は，ひずみ硬化，完全塑性，ひずみ軟化を統一的に扱うことができ，地盤材料をモデル化する上で有望な定式化と思われる。前報では，Cam-clayモデルを変数変換し，ひずみ空間モデル化した。本報告では，ひずみ空間Cam-clayモデルを用いて粘土のひずみ軟化する場合の3軸圧縮試験についての計算を行い，その結果を応力空間塑性論と関連づけて考察している。

2．ひずみ空間塑性論に基づく負荷基準

ひずみ空間では，負荷関数（降伏関数）が次式のように与えられる。

$$f^*=f^*(\varepsilon_{ij},\varepsilon^p_{ij},\kappa)=0 \tag{1}$$

関連流動則を仮定し，適応条件より

$$\lambda^*=\frac{\dfrac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}}{-\left(\dfrac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p_{ij}}+\dfrac{\partial f^*}{\partial \kappa}\dfrac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\right)C_{ijkl}\dfrac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{kl}}}$$

$$=\frac{\hat{f}^*}{H^*}\quad(\lambda^*>0) \tag{2}$$

Ilyushinの仮説より，$H^*>0$ として以下のような負荷基準が導かれる。

$$f^*=0,\ \hat{f}^*>0 \quad\rightarrow\quad d\sigma^p_{ij}\neq 0$$

$$f^*<0 \text{ or } f^*=0,\ \hat{f}^*\leq 0 \quad\rightarrow\quad d\sigma^p_{ij}=0 \tag{3}$$

3．ひずみ空間Cam-clayモデル

ひずみ空間Cam-clayモデルは応力空間からの変数変換により，次のようになる。

$$f^*=\{p_0+K(v-v^p)\}\times$$
$$\exp\left[\frac{1}{M}\left\{\frac{q_0+3G(\gamma-\gamma^p)}{p_0+K(v-v^p)}-\frac{q_0}{p_0}\right\}\right]-p_y=0 \tag{4}$$

硬化・軟化変数p_yは,

$$p_y=p\exp\left\{\left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa}\right)v^p\right\}\times$$
$$\{r_u+(1-r_u)\exp(-h\langle\gamma^p-k\rangle^m)\} \tag{5}$$

で与えられる。r_u，h，k，mは軟化パラメーターである。

4．数値計算例

ここではひずみ空間Cam-clayモデルを用いて粘土のひずみ軟化する場合の3軸圧縮試験についての計算結果を示す。材料定数および初期条件は表－1に示すとおりである。

表－1

材料定数および初期条件
圧縮指数 $\lambda=0.2$
膨潤指数 $\kappa=0.01$
限界応力比 $M=1.5$
体積圧縮係数 $K=360.0$(kgf/cm²)
せん断係数 $G=135.0$(kgf/cm²)
軟化時の応力比(CSR)＝0.7
軟化パラメーター－$r_u=0.5$
軟化パラメーター－$h=$ 400.0
軟化パラメーター－$m=$ 1.5
平均有効主応力 $p_0=2.0$(kgf/cm²)
軸差応力 $q_0=0.0$(kgf/cm²)
初期間隙比 $e_0=0.8$

図－1,2は応力－ひずみ関係，有効応力径路，図－3,4,5は硬化関数H^*－ひずみ関係，ひずみ負荷関数$\hat{f}^*$－ひずみ関係，係数λ^*－ひずみ関係を示している。図－1,2から分かるように，ひずみ軟化域で4回の除荷と再載荷が行われている（せん断ひずみはA=1.8%，B=2.5%，C=4.0%，D=6.5%）。図－3より，軟化域においても硬化関数H^*は正値をとる。これより，ひずみ空間Cam-clayモデルはIlyushinの仮説を満足していることがわかる。また，図－4からひずみ負荷関数$\hat{f}^*$は負荷では正値を，除荷では負値をとる。従って，図－5より係数λ^*は負荷の状態では常に正値をとるので，(3)式のようなひずみ空間における負荷基準が成立する。

5．Cam-clayモデルとの比較

ひずみ空間Cam-clayモデルを用いた計算では，負荷から除荷へ移行する際，ひずみ負荷関数$\hat{f}^*$の符号で判定を行っている。応力空間におけるCam-clayモデルでは軟化時，除荷時ともに応力負荷関数$\hat{f}$が負値をとるので，軟化時の除荷と弾性的応答を区別することが

Nobuharu Abe and Toshiaki Yasui (Osaka University)

できない。従来の応力空間塑性論に，

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}\,d\varepsilon^{e}_{kl} \tag{6}$$

$$d\varepsilon^{e}_{ij}=d\varepsilon_{ij}-\lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{7}$$

なる条件を付加すると，

$$\lambda=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\,d\varepsilon_{kl}}{H+\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}=\frac{\overline{f}}{\overline{H}}=\Lambda \tag{8}$$

(8)式は応力空間塑性論における応力増分－ひずみ増分関係からその逆関係を導く際に常に求められる関係である。ここで，$H<0$ を許容し，$\overline{H}>0$ とすれば次のような負荷基準が成立する。

$$f=0,\ \overline{f}>0 \qquad\qquad \rightarrow d\varepsilon^{p}_{ij}\neq 0$$

$$f<0 \text{ or } f=0,\ \overline{f}\leq 0 \ \rightarrow d\varepsilon^{p}_{ij}=0 \tag{9}$$

この負荷基準は，応力空間における拡張された負荷基準と呼ばれている。応力空間のCam-clayモデルにこの負荷基準を適用した計算結果は図－1～5と全く同じ結果になる（図は同じになるので省略）。このことは以下のように一般的に示すことができる。

ひずみ空間の負荷関数 f^* は応力空間の負荷関数 f から次の変換によって導かれているので，

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij0}+D_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon^{p}_{kl}) \tag{10}$$

f^* と f の間には次の関係が存在する。

$$\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{ij}}=D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}=C_{ijkl}\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{kl}}\right]$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^{p}_{ij}}=-D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}+\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^{p}_{kl}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial \kappa}=\frac{\partial f}{\partial \kappa}$$

これらの関係を(2)式に代入すると，

$$\lambda^*=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\,d\varepsilon_{kl}}{H+\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}=\Lambda \tag{12}$$

すなわち，応力空間における拡張された負荷基準とひずみ空間塑性論は等価である。

6．まとめ

ひずみ空間Cam-clayモデルを用いて軟化時の除荷と再載荷の計算を行った。また，応力空間における拡張された負荷基準はひずみ空間塑性論と等価であることを示した。