

大阪大学工学部 正員 ○小田 和広
大阪大学工学部 正員 松井 保

1. まえがき コッセラ連続体とは、通常の連続体理論の枠組みに角運動による回転の効果を考慮できるように拡張した連続体理論、すなわちマイクロポーラ理論の1つである。本理論の代表的な特徴の一つとして、長さの次元を持つスケールパラメータを材料定数として持つことが挙げられる。このコッセラ連続体理論に有限要素法を適用する場合、スケールパラメータの選択によってはひずみ軟化特性を示すような材料に対してもメッシュ分割の影響がなくなることが指摘されている。そこで、本研究では数値解析に用いる有限要素の種類が解析結果に及ぼす影響について検討を行ってみた。

2. コッセラ連続体 コッセラ連続体とは、材料の構成要素自身が材料全体の変形などと無関係に変形や剛体回転しうる連続体理論である。以下、本研究において対象とする、 xy 平面を対象とした平面ひずみ問題に問題を限り説明を進めて行く。平面ひずみ問題を対象とする場合、考慮すべき自由度は、平面内の2つの変位成分(u_x, u_y)および平面に直行する軸(z 軸)を回転軸とする回転成分(ω_z)である。したがって、1節点当たりの自由度は合計3つとなる。ひずみは以下のように定義される^{1) 2)}。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z \quad \text{および} \quad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \omega_z \quad (1)$$

ここで、 u_x および u_y はマクロ変位、 ω_z はマイクロ回転を表している。直ひずみの定義式は通常の連続体理論におけるものと等しいが、せん断ひずみの定義式には ω_z の項が付加されている。このため、せん断ひずみは対称にならないことが分かる。また、マイクロ回転の勾配は以下の式で定義される。

$$\kappa_{xz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad \text{および} \quad \kappa_{yz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (2)$$

図-1はコッセラ連続体における応力と偶応力の関係を示している。偶応力が作用しているため、せん断応力は共役の関係にならない。弾性状態における応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\sigma_{kl} = \lambda \varepsilon_{\pi} \delta_{kl} + (\mu + \mu_c) \varepsilon_{kl} + (\mu - \mu_c) \varepsilon_{lk} \quad \text{および} \quad m_{kl} / \ell = 2\mu \kappa_{kl} \quad (3)$$

ここで、 λ および μ はラーメの定数である。 μ_c および ℓ はコッセラ連続体理論において新たに導入される材料定数である。特に ℓ はスケールパラメータと呼ばれ、長さの次元を持つパラメータである。

3. 数値解析 今回、一般化リターンマッピング手法³⁾および弧長増分法⁴⁾を適用し、数値解析を行っている。両手法を組み合わせることにより、ひずみ軟化特性を示すような材料も安定して解析できる。今回の解析では、von Misesタイプの降伏関数を持つ弾塑性構成関係を用いている。さて、今回解析に用いた有限要素は、2次の三角形アイソパラメトリック要素および1次の四辺形アイソパラメトリック要素である。三角形要素については7点積分および四辺形要素においては4点積分を用いており、応力、ひずみ、降伏の判定および塑性ひずみ増分の計算等は各積分点において行われている。図-2は解析モデルを示している。解析モデルは平面ひずみ試験をモデル化している。供試体部分の大きさは幅4cm、高さ6cmである。上部の載荷板の部分を除き供試体部分の節点数は117個となり、両モデルにおいて一致している。また、供試体部分の要素数はそれぞれ48個と96個になっている。載荷板は通常の連続体でモデル化されている。解析は、剛な載荷板に等分布荷重を載荷させることにより進められる。表-1は材料パラメータを示している。今回の解析では、ひずみ硬化および軟化挙動は考慮していない。図-3は載荷板に作用している等分布荷重と軸ひずみの関係を示している。いずれのケースにおいても供試体が降伏する

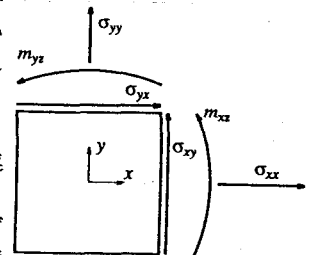


図-1 応力と偶応力の関係

まで、つまり、荷重強度が約0.12MPaまでは荷重強度～軸ひずみ関係は有限要素の種類による影響を受けていない。スケールパラメータが0.01cmおよび0.1cmの場合、供試体が降伏した後、四辺形要素を使用したケースの方が三角形要素を使用したケースよりも若干大きな荷重強度を与えている。これは、供試体部分の

表-1 解析パラメータ

E	98MPa
ν	0.49
μ_c	39.2MPa
σ_y	9.8×10^{-2} MPa

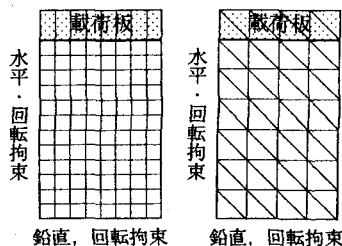


図-2 解析モデル

の節点数が一致していても、応力および塑性ひずみ増分を計算する積分点の位置および数が一致していないためであると考えられる。また、荷重強度が軸ひずみ

とともに増加する理由は、載荷板による供試体端部の拘束効果によるものであると考えられる。スケールパラメータが1.0cmおよび7.5cmの場合、供試体が降伏した後も荷重強度～軸ひずみ関係は有限要素の種類の影響を受けないことが分かる。これは、回転による拘束効果が顕著になるためであると考えられる。また、この効果が顕著になるスケールパラメータの大きさのオーダーは有限要素の一辺の大きさのオーダーと等しいことが分かる。

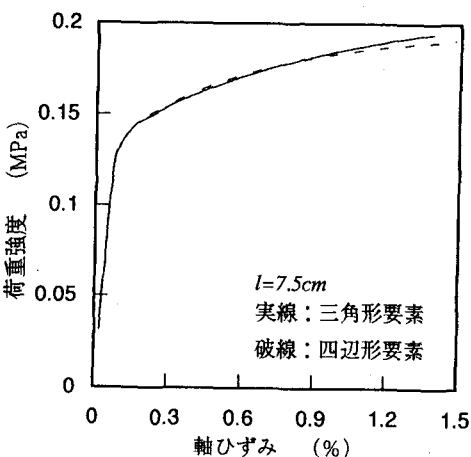
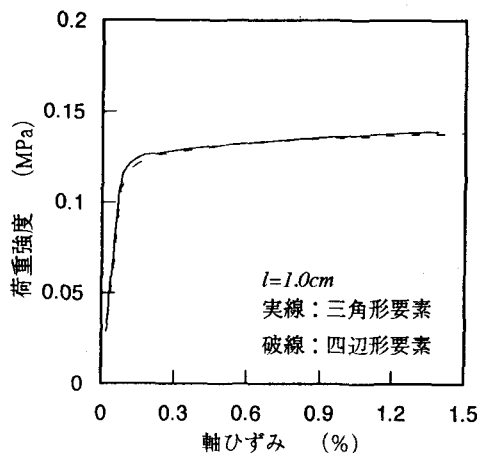
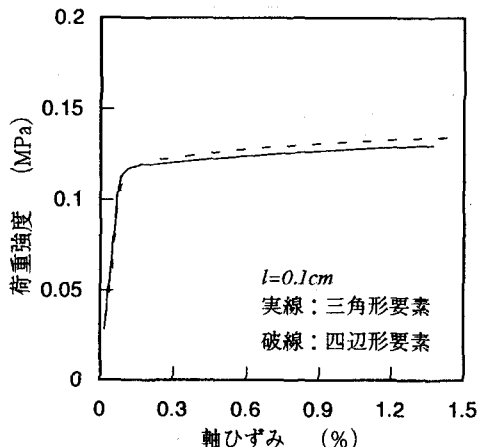
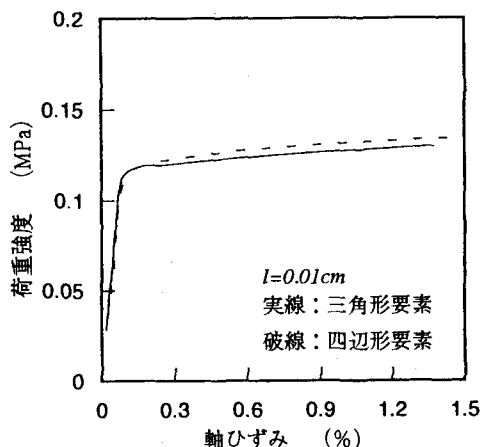


図-3 荷重強度と軸ひずみの関係

なお、本研究は科学研究費補助金 奨励研究A (課題番号: 05650465) によって行われた。

参考文献: 1) 大南正瑛 (編著), 1980: マイクロメカニクス入門 2) de Borst, R. & L. J. Sluys, 1991: Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions, Com. Meth. App. Mech. Eng. 90, pp.805-827 3) Ortiz, M. & J. C. Simo, 1986: An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relation, Int. J. Num. Meth. Eng. vol.23, pp.353-366 4) Crisfield, M. A., 1981: A fast incremental/iterative solution procedure that handles "Snap-Through", Com. Struc. vol. 13, pp.55-62